

ALGEBRA I

Harjoitus 11, kevät 2006

1. Osoita, että Gaussin kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$ muodostaa renkaan. (Vihje: Osoita, että $\mathbb{Z}[i]$ on renkaan \mathbb{C} alirengas).
2. Olkoon R kommutatiivinen rengas ja $a \in R$. Osoita, että joukko $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ on renkaan R ideaali.
3. Olkoon $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}$. Tutki, onko $(E, +, \cdot)$ kunta.
4. Olkoot M ja N renkaan R ideaaleja. Osoita, että myös $M \cap N$ on renkaan R ideaali.
5. Tarkastellaan rengasta $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ja sen ideaaleja $I = (12)$ ja $J = (21)$. Millainen ideaali on $I \cap J$?