

Analyysi I

Harjoitus 11 kevät 2006

1. Tutki suppeneeko integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{x}} dx.$$

2. Tutki suppeneeko integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin^2 x}}{x^2} dx.$$

3. Tutki suppeneeko integraali

$$\int_0^1 \frac{e^{\sin^2 x}}{x^2} dx.$$

4. Tutki suppeneeko integraali

$$\int_0^1 \frac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{x}} dx.$$

5. Olkoon $x > 0$ ja

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

ns. gammafunktio. Todista, että gammafunktion määritelmässä oleva epäoleellinen integraali suppenee.

6. Olkoon $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, \dots$. Määritä huolellisesti perustellen pisteittäinen raja-arvo

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

7. Olkoon $f_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2 - nx, & \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

- (i) Piirrä funktioiden f_n kuvaajat.
(ii) Määritä huolellisesti perustellen funktiojonon (f_n) pisteittäinen raja-arvo

$$f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

(iii) Tutki päteekö

$$\sup_{x \in [0, \infty[} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in [0, \infty[} f_n(x)).$$

8. Olkoon $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$.

(i) Määritä huolellisesti perustellen pisteittäinen raja-arvo

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

(ii) Tutki päteekö

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Oppimispäiväkirja

10. tehtäväkokoelma; Deadline 31.3.2006

1. Olkoon $f :]0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ x - 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Laske $\int_0^2 f(x) dx$.

2. Tutki suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2} dx.$$

3. Tutki suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} dx.$$

4. Tutki suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} dx.$$