Analyysi I

Harjoitus 1, kevät 2006

1. Määritä huolellisesti perustellen joukon
$$\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n = 1, 2, \cdots\right\}$$
infinimum ja supremum.

2. Oletetaan, että A ja B ovat $\mathbb{R}$:n rajoitettuja epätyhjiä osajoukkoja. Todista, että $A \cup B$ on rajoitettu ja että
$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

3. Oletetaan, että A ja B ovat $\mathbb{R}$:n rajoitettuja epätyhjiä osajoukkoja ja että $A \subset B$. Todista, että
$$\inf A \geq \inf B \quad \text{ja} \quad \sup A \leq \sup B.$$

4. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$, on alhaalta rajoitettu. Todista, että
$$\inf A = -\sup\{-x : x \in A\}.$$

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}, A \neq \phi$ ja oletetaan, että $f, g : A \to \mathbb{R}$ ovat sellaisia funktioita, että
$$\sup_{x \in A} f(x) < \infty \text{ ja } \sup_{x \in A} g(x) < \infty.$$
(i) Todista, että
$$\sup_{x \in A}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x).$$
(ii) Etsi funktiot f ja g, joille pätee aito epäyhtälö kohdassa (i).
(iii) Etsi funktiot f ja g, joille pätee yhtälö kohdassa kohdassa (i).
(iv) Etsi funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) < \infty,$$
mutta $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ ei ole olemassa.
Käytämme merkintää $\sup_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\}$.

Oppimispäiväkirja

1. tehtäväkokoelma; Deadline 27.1.2006

1. Todista, että
$$\sup\left\{1-\frac{1}{n} : n=1,2,\cdots\right\}=1.$$

2. Todista, että
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right]=\{0\}.$$

3. Todista, että
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[n,\infty\,[\,=\emptyset.$$

4. Oletetaan, että $A\subset\mathbb{R}, A\neq\emptyset, A$ on alhaalta rajoitettu ja että m on A:n alaraja. Todista, että $m=\inf A$ jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon>0$ on olemassa sellainen $x\in A$, että $x<m+\varepsilon$.

   (Opastus: Muokkaa luentojen lauseen 1.6 todistusta.)

5. Olkoon $x_n=\dfrac{2n}{n+1}, n=1,2,\cdots$.

   (i) Todista tarkasti perustellen, että $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

   (ii) Mistä indeksin arvosta N alkaen pätee, että
$$|x_n-2|<0,01 \;\text{ kaikille }\; n\geq N?$$