

Analyysi I

Harjoitus 3, kevät 2006

1. Olkoon

$$x_1 = 1 \text{ ja } x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3), n = 1, 2, \dots .$$

Todista, että jono (x_n) suppenee ja määritä sen raja-arvo.

2. Olkoon

$$x_1 = 1 \text{ ja } x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n = 1, 2, \dots .$$

Todista, että jono (x_n) suppenee ja määritä sen raja-arvo.

3. Olkoon

$$x_1 = 1 \text{ ja } x_{n+1} = 2x_n + 1, n = 1, 2, \dots .$$

Tutki suppeneeko jono (x_n) .

4. Olkoon

$$x_1 = 1 \text{ ja } x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) x_n, n = 1, 2, \dots .$$

Todista, että $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

(Opastus: Etsi ja todista lauseke x_n :lle.)

5. Todista, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

jos $|a| < 1$. Tutki, mitä tapahtuu, jos $|a| \geq 1$.

(Opastus: $(1+x)^n > nx$, $x > 0$, $n = 1, 2, \dots$.)

6. Todista, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(Opastus: $(1+x)^n > n(n-1)\frac{x^2}{2}$, $x > 0$, $n = 2, 3, \dots$.)

Oppimispäiväkirja

2. tehtäväkokoelma; Deadline 3.2.2006

1. Olkoon $x_n = 1 - (-1)^n + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$.
 - a) Todista, että (x_n) on rajoitettu.
 - b) Todista, että (x_n) hajaantuu.
(Opastus: Etsi kaksi osajonoa, jotka suppenevat kohti eri lukuja.)
2. Olkoon $x_n = \frac{n}{n+2}, n = 1, 2, \dots$. Todista Cauchyn jonon määritelmää käyttäen, että (x_n) on Cauchyn jono.
3. Todista Cauchyn jonon määritelmää käyttäen, että tehtävän 1 jono (x_n) ei ole Cauchyn jono.
4. Olkoon $x_n = n(1 + (-1)^n), n = 1, 2, \dots$.
 - a) Etsi jonolle (x_n) sekä suppeneva että hajaantuva osajono.
 - b) Onko jono (x_n) rajoitettu?
5. Tutki huolellisesti perustellen, ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia.
 - (1) Jos (x_n) ei ole rajoitettu, niin joko $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ tai $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.
 - (2) Jos (x_n) ei ole rajoitettu, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$.
 - (3) Jos (x_n) ja (y_n) ovat rajoitettuja, niin $(x_n + y_n)$ on rajoitettu.
 - (4) Jos (x_n) ja (y_n) eivät ole rajoitettuja, niin $(x_n + y_n)$ ei ole rajoitettu.
 - (5) Jos (x_n) ja $(x_n + y_n)$ suppenevat, niin (y_n) suppenee.
 - (6) Jos (x_n) ja $(x_n y_n)$ suppenevat, niin (y_n) suppenee.
 - (7) Jos (x_n) on rajoitettu, niin $(\frac{x_n}{n})$ suppenee.
 - (8) Jono on rajoitettu jos ja vain jos sen kaikki osajonot ovat rajoitettuja.
 - (9) Jono hajaantuu jos ja vain jos sen kaikki osajonot hajaantuvat.
 - (10) Jono on monotoninen jos ja vain jos sen kaikki osajonot ovat monotonisia.