Analyysi I

Harjoitus 4 kevät 2006

1. a) Oletetaan, että (x_n) on jono, jolle pätee

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \cdots .$$

   Todista, että (x_n) suppenee.
   (Opastus: (x_n) on Cauchyn jono geometrisen sarjan suppenemisen nojalla.)

   b) Tutki onko kohdan a) tulos voimassa , jos oletamme että

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots .$$

2. Määritellään jono (x_n) rekursiivisesti niin, että

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ ja } x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}), n = 3, 4, \cdots .$$

   a) Todista, että $1 \leq x_n \leq 2$ kaikilla $n = 1, 2, \cdots$.
   b) Todista, että $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}, n = 1, 2, \cdots$.
   c) Todista, että (x_n) on Cauchyn jono ja päättele, että se suppenee.
   d) Tutki onko (x_n) monotoninen.

3. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on L-Lipschitz, jos on olemassa vakio $L \geq 0$, jolle pätee

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

   kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Todista, että jo (x_n) on Cauchyn jono, niin myös $(f(x_n))$ on Cauchyn jono, jos f on L-Lipschitz.

4. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1}, n = 2, 3, \cdots, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

   Tutki onko funktiolla f raja-arvoa 0:ssa.

5. Olkoon $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jos } x = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \cdots, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

   Tutki ovatko seuraavat raja-arvot olemassa:
   (i) $\lim_{x \to 3/8} f(x)$,

   (ii) $\lim_{x \to 1/4} f(x)$ ja

   (iii) $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Oppimispäiväkirja

3. tehtäväkokoelma; Deadline 10.2.2006

1. Todista huolellisesti perustellen, että $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2} = 1$. Määritä sellainen $\delta > 0$, että
$$\left|\frac{1}{x^2} - 1\right| < \frac{1}{1000} \text{ kun } 0 < |x-1| < \delta.$$

2. Olkoon $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Todista huolellisesti perustellen, että funktiolla f ei ole raja-arvoa 0:ssa.

3. Olkoon $f(x) = \frac{x}{|x|}, x \neq 0$. Tutki onko funktiolla f raja-arvoa 0:ssa.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka on jatkuva pisteessä 0 ja jolle pätee
$$|f(x)| \leq \frac{1}{|x|} \text{ kun } \ x \neq 0.$$
Todista, että f on rajoitettu funktio.

5. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 1, \\ 2, x \neq 1, \end{cases}$$
ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 1$. Näytä, että
$$\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x) \neq (f \circ g)(0).$$
Onko funktio $f \circ g$ jatkuva origossa?

6. Oletetaan, että $[a_k, b_k], k = 1, 2, \cdots$, ovat sellaisia suljettuja välejä, että $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ kaikilla $k = 1, 2, \cdots$ ja
$$\lim_{k=\infty}(b_k - a_k) = 0.$$
Todista, että on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{R}$, että
$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] = \{x_0\}.$$