Analyysi I

Harjoitus 5, kevät 2006

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x, x \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Todista, että f on jatkuva origossa ja epäjatkuva kaikissa muissa pisteissä.

2. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia funktioita koko $\mathbb{R}$:ssä ja että $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{Q}$. Todista, että $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

3. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja
$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}.$$
Todista, että jos $x_n \in A, n = 1, 2, \cdots$, ja $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, niin $x_0 \in A$.

4. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}, A \neq \phi$. Pisteen $x \in \mathbb{R}$ etäisyys joukosta A määritellään asettamalla
$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}.$$
Todista, että $\mathrm{dist}(x, A)$ on jatkuva funktio x:n suhteen.
(Opastus: $|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leq |x - y|$.)

5. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Todista, että jos $f(x_0) > 0$, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että
$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2}, \text{ kun } |x - x_0| < \delta.$$

6. Oletetaan, että $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f(x) > 0$ on kaikilla $x \in [0, 1]$. Todista, että on olemassa $m > 0$ siten, että $f(x) \geq m$ kaikilla $x \in [0, 1]$. Tutki päteekö väite, jos suljettu väli korvataan avoimella välillä $]0, 1[$.

7. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että on olemassa $L \geq 0$, jolle pätee
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$
kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Todista, että f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Anna esimerkki funktiosta, jolle ehto ei päde.

KÄÄNNÄ

Oppimispäiväkirja

4. tehtäväkokoelma; Deadline 17.2.2006

1. Tutki onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0, \end{cases}$$

   jatkuva 0:ssa.

2. Tutki onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0, \end{cases}$$

   jatkuva 0:ssa.

3. Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on epäjatkuva täsmälleen joukossa

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}.$$

   Perustele erityisesti miksi funktio on jatkuva origossa.

4. Oletetaan, että $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia funktioita joukossa A. Todista, että funktio $h : A \to \mathbb{R}, h(x) = \min(f(x), g(x))$ on jatkuva joukossa A.
   (Opastus: $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}|a - b|$.)

Ensimmäinen välikoe on to 16.2. klo 16-19 salissa L1; koealue: luvut 1-3.

KÄÄNNÄ