Analyysi I

Harjoitus 8 kevät 2006

1. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq 1, \\ 3 & , x = 0. \end{cases}$$
Todista määritelmän perusteella, että f on Riemann-integroituva välillä [0,1].
(Opastus: Tutki jakoja $D = \{0, \varepsilon, 1\}, 0 < \varepsilon < 1$.)

2. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$. Todista määritelmän avulla, että f on Riemann-integroituva välillä [0,1] ja laske
$$\int_0^1 f(x)dx.$$

3. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \cdots, \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$
Todista, että f on Riemann-integroituva välillä [0,1] ja laske
$$\int_0^1 f(x)dx.$$

4. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että
$$|f(x) - f(y)| \leq 7|x - y|$$
kaikilla $x, y \in [0,1]$. Anna esimerkki jaosta D, jolle pätee
$$S_D - s_D < 0,1.$$

5. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$. Tutkitaan välin $[0,1]$ jakoja $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Laske S_{D_n} ja s_{D_n}, $n \in \mathbb{Z}_+$. Laske myös raja-arvot
$$\lim_{n\to\infty} S_{D_n} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} s_{D_n}.$$

Oppimispäiväkirja

7. tehtäväkokoelma; Deadline 10.3.2006

1. Olkoon $f : [-1,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$. Laske S_D ja s_D kun $D = \{-1,0,1,2\}$.

2. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu. Oletetaan lisäksi, että jaolle $D_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, 1\}$ pätee $S_{D_1} < 2,2$ ja jaolle $D_2 = \{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{3}, 1\}$ pätee $s_{D_2} > 1,7$. Anna esimerkki jaosta D, jolle
$$S_D - s_D < 0,5.$$

3. Olkoon $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$
Todista, että f on Riemann-integroituva välillä $[-1,1]$ ja että
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.$$

4. Olkoon $f : [0,2] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1, \\ -1 & ,1 < x \leq 2. \end{cases}$$
Todista määritelmän avulla, että f on Riemann-integroituva ja laske
$$\int_{0}^{2} f(x)dx.$$