Analyysi I

Harjoitus 9 kevät 2006

1. Todista, että $f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ei ole tasaisesti jatkuva.

2. Tutki onko funktio $f :]0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ tasaisesti jatkuva.

3. Todista määritelmän avulla, että funktio $f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ on tasaisesti jatkuva. Huomaa, että tehtävissä 1. ja 2. funktion kuvaajat "nousevat pystyyn". Pohdi miksi toinen on tasaisesti jatkuva ja toinen ei.

4. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva. Todista, että f^2 on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.

5. Todista, että jos $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat Riemann-integroituvia funktioita, niin fg on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.
(Opastus: $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$.)

6. Olkoot f ja g kuten tehtävässä 5. Tutki päteekö
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right).$$

7. Oletetaan, että $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva ja että $c \in [a, b]$. Todista, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, c]$ ja $[c, b]$ ja että
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Oppimispäiväkirja

8. tehtäväkokoelma; Deadline 17.3.2006

1. Olkoon $f : [0,3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Määritä $\delta > 0$ siten, että
$$|f(x) - f(y)| < 0,001$$
kaikilla $x, y \in [0,3], |x - y| < \delta$.

2. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva.
Jos $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ ja $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, niin todista, että
$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

3. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a,b]$. Todista, että jos
$$\int\limits_a^b f(x)dx = 0,$$
niin $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a,b]$.
Päteekö väite, jos f saa vaihtaa merkkiään? Päteekö väite, jos f ei ole jatkuva?