Analyysi I

Harjoitus 10 kevät 2006

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x |t|dt$. Tutki onko $f'(0)$ olemassa. Onko f jatkuvasti derivoituva $\mathbb{R}$:ssä?

2. Olkoon $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_1^x \sin(e^t)dt.$$

Tutki saavuttaako f suurimman ja pienimmän arvonsa välillä [1,2] ja jos saavuttaa, niin määritä ne x:n arvot, joilla ne saavutetaan.

3. Jos $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, jolle pätee

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

kaikilla $x \in [0, 1]$, niin todista että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 1]$.

4. Laske $f'(x)$, jos

(i) $f(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt,$ (ii) $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$

5. Olkoon $c \in \mathbb{R}$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, x \geq 0, \\ 1, x < 0. \end{cases}$

Määritä raja-arvot

$$\lim_{m \to -\infty} \int_m^c f(x)dx \ \text{ ja } \lim_{M \to \infty} \int_c^M f(x)dx.$$

6. Tutki millä $s \in \mathbb{R}$ integraali $\int_0^1 \frac{1+x}{x^s} dx$ suppenee.

7. Todista, että $\int_0^1 \ln x \ dx$ suppenee ja laske se.

8. Todista, että $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ suppenee ja etsi sen arvolle yläraja.

(Opastus: $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ kun $x \geq 1$ ja $0 < e^{-x^2} \leq 1$ kun $x \in [0, 1]$.)

Oppimispäiväkirja

9. tehtäväkokoelma; Deadline 24.3.2006

1. Olkoon $f : [0,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Tutki, missä pisteissä $F :]0,3[\to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)dt$, on derivoituva ja laske $F'(x)$ niissä pisteissä. Piirrä funktioiden f ja F kuvaajat.

2. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0, \\ 1 & , x = 0. \end{cases}$$

(i) Todista, että f on jatkuva välillä [0,1].

(ii) Olkoon $F : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt.$$

Laske $F'(x), x \in]0,1[$.

3. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituva ja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Osoita, että F on kasvava, jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a,b]$.