Analyysi I

Harjoitus 12 kevät 2006

1. Olkoon $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}, n = 1, 2, \cdots, x \geq 0.$
   (i) Todista, että funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin joukossa $[0, \infty[$.
   (ii) Todista, että funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti jokaisella välillä $[0, b]$, missä $0 < b < 1$.
   (iii) Todista, että funktiojono (f_n) ei suppene tasaisesti välillä [0,1]

2. Olkoon $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}, n = 1, 2, \cdots .$
   (a) Todista, että $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, missä $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$.
   (b) Todista, että funktiojono (f_n) ei suppene tasaisesti kohti funktiota f joukossa $\mathbb{R}$ (vaikka rajafunktio on jatkuva).

3. Anna esimerkki jonosta $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \cdots$, jonka kaikki funktiot $f_n, n = 1, 2, \cdots$, ovat epäjatkuvia jokaisessa pisteessä $x \in [0, 1]$ ja joka suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

4. Oletetaan, että $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = x + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$ ja että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$. Todista, että f_n suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa $\mathbb{R}$, mutta f_n^2 ei suppene tasaisesti kohti funktiota f^2.

5. Oletetaan, että $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \cdots, A \subset \mathbb{R}$, ovat sellaisia funktioita, että f_n suppenee tasaisesti kohti funktiota $f : A \to \mathbb{R}$ joukossa A ja g_n suppenee tasaisesti kohti funktiota $g : A \to \mathbb{R}$ joukossa A. Todista, että $f_n + g_n$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f + g$ joukossa A.

6. Oletetaan, että $f_n[a, b] \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \cdots$, ja $f : [1, b] \to \mathbb{R}$ ovat Riemann-integroituvia ja että jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa $[a, b]$. Todista, että
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

7. Todista, että
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\pi \frac{\sin(nx)}{nx} dx = 0$$
kun $0 < a < \pi$.

Oppimispäiväkirja

11. tehtäväkokoelma; Deadline 7.4.2006

1. Olkoon $f_n(x) = \dfrac{x}{n}, n = 1, 2, \cdots$, ja $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.
   (i) Todista, että jono (f_n) ei suppene tasaisesti kohti funktiota f joukossa $[0, \infty[$.
   (ii) Todista, että jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa $[0, 1]$.

2. Olkoon $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, n = 1, 2, \cdots$. Todista, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja että $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \infty$.

3. Todista, että funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa A jos ja vain jos
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

4. Todista, että
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 e^{-nx^2}\,dx = 0.$$
(Opastus: $e^{-nx^2} \leq e^{-n}$ kun $x \in [1, 2]$.)