

Analyysi I

Harjoitus 13, kevät 2006

1. Tutki millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k2^k}$$

suppenee.

2. Tutki millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(x-2)^k}{k+1}$$

suppenee.

3. Tutki millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^k}{k!} (x-1)^k$$

suppenee.

4. Tutki millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} x^k$$

suppenee.

5. Jos potenssarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde on R , niin mikä on sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k x^k$ suppenemissäde, missä $\rho \in \mathbb{R}$ on vakio?

6. Jos potenssarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde on R , niin mikä on sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{kn}$ suppenemissäde, missä $n = 1, 2, 3, \dots$?

7. Jos potenssarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde on R , niin mikä on sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+n}$ suppenemissäde, missä $n = 1, 2, 3, \dots$?

8. Etsi seuraavien funktioiden Taylorin sarjat, kun $x_0 = 0$.

(i) $\sin x$,

(ii) $\cos x$.

Todista, että sarjat suppenevat.

Oppimispäiväkirja

12. tehtäväkokoelma; Deadline 26.4.2006

1. Todista, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$ suppenee itseisesti, kun $|x| < 1$ ja hajaantuu, kun $|x| > 1$.
Tutki mitä tapahtuu, kun $|x| = 1$.

2. Seuraavien sarjojen suppenemissäde on 1. Tutki sarjojen suppenemistä, kun $|x| = 1$.

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$.

3. Tutkitaan geometrista sarjaa $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

(i) Johda kaava osasummalle $\sum_{k=0}^n x^k$.

(ii) Todista, että sarja suppenee jos ja vain jos $|x| < 1$ ja johda kaava sarjan summalle. Todista, että summafunktio on jatkuva välillä $] -1, 1[$.

(iii) Todista, että termeittäin derivoitu sarja $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ suppenee, kun $|x| < 1$ ja johda kaava sen summalle.
(Opastus: Derivoi kohdan (i) tulos puolittain.)

4. Tutki millä $x \in \mathbb{R}$ sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ suppenee.