Analyysi I

Harjoitus 2, kevät 2006

1. Oletetaan, että $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n = 1, 2, \cdots$. Todista huolellisesti perustellen, että jono (x_n) suppenee.

2. Oletetaan, että $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$. Tutki huolellisesti perustellen, että suppeneeko jono (x_n).

3. Määritä
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}.$$

4. a) Todista, että jos $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, niin $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

   b) Näytä esimerkillä, että käänteinen väite ei päde kohdassa a).

   c) Todista, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

5. Oletetaan, että $x_n \neq 0, n = 1, 2, \cdots$.

   a) Jos
   $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1,$$
   niin todista, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

   b) Jos
   $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| > 1,$$
   niin todista, että (x_n) ei ole rajoitettu.

6. Oletetaan, että $x_n > 0, n = 1, 2, \cdots$. Todista, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$.