

Analyysi I

Harjoitus 6, kevät 2006

1. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteen avulla suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 5k}.$$

2. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteen avulla suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k}.$$

3. Tutki suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k^2 - 1)}{k^2 + 1}.$$

4. Tutki suppeneeko sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k (2 + \sin k)}.$$

5. Todista, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

suppenee.

6. Oletetaan, että $x_k \geq 0, y_k \geq 0$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$ ja että sarjat

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevat. Todista, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k y_k}$$

suppenee.

7. Oletetaan, että $x_k, y_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$ ja että raja-arvo

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{y_k}$$

on olemassa.

a) Todista, että jos $a \neq 0$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee jos ja vain jos $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee.

b) Todista, että jos $a = 0$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, jos $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee.

c) Tutki, että jos $a = 0$, niin seuraako sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenemisestä sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppeneminen.

8. Oletetaan, että $x_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$.

(i) Todista, että jos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ suppenee.

(ii) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin suppeneeko $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k}$?

Oppimispäiväkirja

5. tehtäväkokoelma; Deadline 24.2.2006

1. Näytä, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{k+1}}{3^k}$$

suppenee ja laske sen summa.

2. Tutki millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x - 1}{3x + 1} \right)^k, x \neq -\frac{1}{3},$$

suppenee ja laske silloin sen summa.

3. Todista, että $0,999\cdots = 1$.

(Opastus: $0,999\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$.)

4. Todista, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1.$$

5. Tutkitaan suppenevaa sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

a) Arvioi kuinka paljon 100. osasumma poikkeaa sarjan summasta.

b) Arvioi kuinka monta termiä osasummaan on otettava, jotta se poikkeaisi sarjan summasta vähemmän kuin 10^{-5} .

(Opastus: Arvioi virhettä integraalin avulla.)