Analyysi I

Harjoitus 7, kevät 2006

1. Todista, että jos sarja suppenee ehdollisesti, niin sen positiivisista termeistä muodostettu sarja hajaantuu ja sen negatiivisista termeistä muodostettu sarja hajaantuu.

2. Oletetaan, että $x_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \cdots$.

   a) Todista, että jos $\lim\limits_{k\to\infty} kx_k > 0$, niin sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu.

   b) Todista, että jos raja-arvo $\lim\limits_{k\to\infty} k^2 x_k$ on olemassa, niin sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

3. Tutki suppeneeko sarja

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \cdots .$$

   (Opastus: Tutki sarjan positiivisten ja negatiivisten termien muodostamia sarjoja.)

4. (i) Todista, että $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k$ hajaantuu.

   (ii) Todista, että $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ suppenee.

5. Oletetaan, että $x_k \geq 0, k = 1, 2, \cdots$, ja että $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Todista, että jonolla (x_k) on olemassa sellainen osajono (x_{k_j}), että sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{k_j}$$

   suppenee.

6. Oletetaan, että $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k, x_k > 0, k = 1, 2, \cdots$, on suppeneva sarja. Rakennetaan uusi sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, missä

$$y_k = \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k), k = 1, 2, \cdots .$$

   Todista, että $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu.

Oppimispäiväkirja

6. tehtäväkokoelma; Deadline 3.3.2006

1. Tutki suppenevatko seuraavat sarjat itseisesti

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(k\pi)}{2^k}$.

2. Tutki suppenevatko sarjat

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$.

itseisesti tai ehdollisesti.

3. Tutki millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k2^k}$$

a) suppenee itseisesti,

b) suppenee ehdollisesti,

c) hajaantuu.

4. Tutkitaan suppenevaa sarjaa $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4}$.

a) Arvioi kuinka paljon 40. osasumma poikkeaa sarjan summasta.

b) Arvioi kuinka monta termiä osasummaan on otettava, jotta se poikkeaisi summasta korkeintaan 10^{10}.