KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 7, kevät 2006

1. a) Osoita, että $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$ aina, kun $z \in \mathbb{C}$.

   b) Osoita, että $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ aina, kun $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

   c) Osoita, että $\tan(z + \pi) = \tan z$ aina, kun $z \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$.

   d) Osoita, että $arc \tan z = \dfrac{i}{2} \log \left(\dfrac{i+z}{i-z} \right)$.

2. Osoita, että $\dfrac{d}{dz}(arc \tan z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.

3. Laske raja-arvot

   a) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2 + 2z}$, b) $\displaystyle\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$, c) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{\cos 2z - 1}{\sin^2 z}$.

4. Osoita, että funktio $u(x, y) = e^{ax} \cos ay$ ($a \in \mathbb{R}$ vakio), $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on harmooninen koko $\mathbb{C}$:ssä. Määrää sellainen funktio $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, että funktio $f = u + iv$ on analyyttinen koko $\mathbb{C}$:ssä.

5. Määrää derivaatta $f'(z)$, kun

   a) $f(z) = \cos(z^2 + iz)$, b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.