

KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 8, kevät 2006

1. Laske tieintegraalit:

a) $\int_{\gamma} (z^2 - z) dz$; γ on murtoviiva $\gamma_1 \cup \gamma_2$, missä

$$\gamma_1(t) = (1-t)i - t, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ ja}$$

$$\gamma_2(t) = -1 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

b) $\int_{\sigma} \operatorname{Im} z dz$; $\sigma = -\gamma$, missä γ kiertää yksikköympyrän positiiviseen kiertosuuntaan $1 \rightarrow 1$.

c) Laske $\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz$, kun $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, missä $\gamma_1 : z(t) = t + i$, $0 \leq t \leq 1$ ja $\gamma_2 : z(t) = 1 + ti$, $1 \leq t \leq 3$.

d) Laske $\int_{\gamma} z^3 dz$, kun γ on ellipsin $x^2 + 4y^2 = 1$ kaari pisteestä $z = 1$ pisteesseen $z = \frac{1}{2}i$.

2. Osoita, että

$$\left| \int_{\gamma} (x^2 + iy^2) dz \right| \leq \pi,$$

kun γ on ympyränkaari $i \rightarrow -i$.

3. Laske

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z}} dz, \text{ kun } \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$