

KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 3, kevät 2006

1. Osoita induktion avulla, että

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dx,$$

aina, kun $z \in D_r(z_0)$, aina, kun $n = 1, 2, 3, \dots$, missä f on alueessa A analyyttinen funktio, jolle $cl(D_r(z_0)) \subset A$ ja $\gamma_r(z_0)$ on kiekon $D_r(z_0)$ reunakäyrä.

2. Olkoon $p(z) = a_0 + a_1 z_1 + \dots + a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Osoita, että $\int_{\gamma} \frac{p(z)}{z^{k+1}} dz = 2\pi i a_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, kun $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

3. Oletetaan, että funktiot f_n , $n = 1, 2, \dots$, ovat jatkuvia joukossa $E \subset \mathbb{C}$. Osoita, että jos $f_n \rightarrow f$ tasaisesti E :ssä, niin f on jatkuva.

4. Tutki funktiojonojen f_n suppenemista joukossa E , kun

a) $f_n(z) = \frac{nz}{z+n}$, $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

b) $f_n(z) = \frac{nz}{nz+1}$, $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

5. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+|z|}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+|z|}$, c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+z}$, d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+|z|}$.