

KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 4, kevät 2006

1. Määrää seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet ja suppenemiskiekot

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + 1} z^k, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (z - 1)^k, \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k.$$

Tutki sarjan suppenemistä myös suppenemiskiekon reunalla.

2. Määrää sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}i}\right)^{k+1} (z - \frac{1}{2}i)^k$ suppenemissäde ja määrää myös sarjan summa.

3. Tunnetusti $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, kun $|z| < 1$. Määrää funktio $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$, kun $|z| < 1$.

4. Olkoon $f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$. Tutki milloin sarja suppenee. Määrää funktion $f(z)$ lauseke. Onko f analyyttinen koko \mathbb{C} :ssä?

5. Olkoon $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} z^k$. Määrää $f^{(9)}(0)$.