KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 4, kevät 2006

1. Tutki mitkä seuraavista funktioista ovat bijektioita $\mathcal{M}(f) \to \mathcal{A}(f)$ ja määrää $f^{-1} : \mathcal{A}(f) \to \mathcal{M}(f)$ mikäli mahdollista.

   a) $f(z) = \bar{z} + i,\ z \in \mathbb{C}$,

   b) $f(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

   c) $f(z) = z^2 + i,\ z \in \mathbb{C}$,

   d) $f(z) = z^2 + i,\ z \in S[0, \pi)$.

2. Osoita, että $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^x\ (\cos y + i \sin y)$, kun $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

3. Olkoon $f : S[0, \frac{2\pi}{3}) \to \mathbb{C}$ funktio, jolle $f(z) = z^3 + i,\ z \in S[0, \frac{2\pi}{3})$. Tutki onko f bijektio $\mathcal{M}(f) \to \mathbb{C}$. Määrää $f^{-1}(1)$.

4. a) Osoita, että

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z}.$$

   b) Ratkaise yhtälö

$$e^z = -1.$$

5. Määrää

   a) $\log(-4)$, b) $\log 3i$, c) $\log(\sqrt{3} - i)$.

6. Määrää

   a) i^{2i}, b) $(-i)^i$, c) i^{-i}.