Koulumatematiikan perusteet

Harjoitus 1

1. Esitä luku 3047 egyptiläisten merkintätapaa käyttäen.

2. Egyptiläiset laskivat usein lukujen $m, n \in \mathbb{N}$ ensin kahdentamalla (kahdella kertominen) luvun n riittävän monta kertaa ja laskivat tämän jälkeen kahdentamalla saadut luvut yhteen. Laske edellä mainitulla tavalla $12 \cdot 12$.
   Laskennan nopeuttamiseksi he kertoivat usein kymmenellä ja joskus myös puolittivat tuloksen. Laske $16 \cdot 16$ em. tavalla. (Käytä molemmissa egyptiläistä merkintätapaa.)

3. Osoita ilman lausetta 2.3.1., että $0 \cdot m = 0$ ja $1 \cdot m = m$ kaikilla $m \in \mathbb{N}_0$.

4. Määritellään luonnollisten lukujen $m, n \in \mathbb{N}_0$ potenssi m^n rekursiivisesti asettamalla
$$m^0 = 1, \quad m^{n+1} = m^n \cdot m.$$
   Osoita induktiolla, että
   (i) $m^{n+r} = m^n \cdot m^r$,
   (ii) $m^{n \cdot r} = (m^n)^r$,
   (iii) $(m \cdot n)^r = m^r \cdot n^r$

   kaikilla $m, n, r \in \mathbb{N}_0$.

5. Osoita induktiolla, että
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \quad \text{kaikilla}\, n \in \mathbb{N}_0.$$

6. Osoitetaan induktiolla väite ”Jos n naisen joukossa on ainakin yksi vaalea, niin joukon kaikki naiset ovat vaaleita”. Väite pätee, kun $n = 1$. Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan väitös on tosi arvolla $n = k$. Olkoon $\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ $k+1$ naisen joukko, joka sisältää ainakin yhden vaalean. Rajoituksetta voidaan olettaa, että a_1 on vaalea. Joukko $\{a_1, \ldots, a_k\}$ koostuu induktio-oletuksen mukaan vaaleista. Joukko $\{a_2, \ldots, a_{k+1}\}$ sisältää tällöin ainakin yhden vaalean, joten sekin koostuu induktio-oletuksen mukaan vaaleista. Näin joukon $\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ kaikki naiset ovat vaaleita, joten väite seuraa induktioperiaatteesta. Missä vika?