Koulumatematiikan perusteet

Harjoitus 3, kevät 2006

1. Jos lukujen $1-5$ kertotaulu tunnetaan, niin lukujen $6-10$ kertolaskut voidaan laskea sormilla seuraavalla tavalla.

   - Liitä molempien käsien sormiin pikkusormesta peukaloon luvut $6-10$ (Esimerkiksi keskisormi vastaa lukua 8 ja nimetön lukua 7).
   - Pidä molempia käsiä niin, että peukalot ovat ylimpänä. Valitse molemmista käsistä sormet ja kosketa niillä toisiaan (esim. keskisormi ja nimetön, jotka vastaavat lukuja 8 ja 7).
   - Laske toisiaan koskettavien ja niiden alapuolella olevien sormien lukumäärä yhteen. Näin saat kymmeniä (esimerkkitapauksessa kymmeniä on $3+2=5$ kappaletta).
   - Kerro toisiaan koskettavien sormien yläpuolella olevien sormien lukumäärä keskenään (esimerkkitapauksessa $2 \cdot 3 = 6$.
   - Laske edellisissä kohdissa saadut luvut yhteen. Näin saat sormien ilmoittaman tulon (esimerkkitapauksessa $5 \cdot 10 + 2 \cdot 3 = 50 + 6 = 8 \cdot 7$).

   Perustele, miksi lukujen $6-10$ kertolaskut voidaan laskea edellä kuvatulla tavalla.

2. Esitä a) luku 653 7-järjestelmässä, b) 7-järjestelmän luku 653_7 kymmenjärjestelmässä.

3. Laske allekkain

   (a) $101111011_2 + 1100111011_2$,
   (b) $1101101100_2 - 101110101_2$,
   (c) $11101_2 \cdot 110001_2$,
   (d) $1032_5 - 433_5$,
   (e) $24_5 \cdot 131_5$.

4. Määritellään joukossa $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ relaatio $\sim$ asettamalla
$$(m, n) \sim (r, s) \Leftrightarrow m + s = r + n.$$
   Osoita, että kyseessä on ekvivalenssirelaatio.

5. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa X ja olkoon E_x alkion $x \in X$ määräämä ekvivalenssiluokka. Osoita, että $E_x = E_y$ jos ja vain jos $x \sim y$.

6. Olkoon $[m, n] \in \mathbb{Z}$. Osoita, että $[m, n] = [m + p, n + p]$ kaikilla $p \in \mathbb{N}_0$.

7. Osoita, että kokonaislukujen joukossa pätee ns. tulon nollasääntö:
$$[m, n] \cdot [p, q] = [0, 0] \Leftrightarrow [m, n] = [0, 0] \text{ tai } [p, q] = [0, 0].$$