

## Koulumatematiikan perusteet

Harjoitus 7, kevät 2006

1. Olkoon  $X$  perusjoukko. Osoita, että joukkojen yhtämahtavuus on ekvivalenssi-relaatio joukossa  $\mathcal{P}(X)$ .
2. Osoita, että  $|\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}| = |\mathbb{R}_+|$ .
3. Osoita, että  $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ .
4. Osoita, että  $|\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}_0|$  käyttämällä funktiota  $f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$ .
5. Olkoot  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  ja  $c < d$ . Merkitään  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ . Osoita, että  $]a, b[ = ]c, d[$ .
6. Osoita, että  $]0, \epsilon[$  on ylinumeroituva olipa  $\epsilon > 0$  kuinka pieni tahansa.
7. (Tehtävä on muokkaus tieteiskirjailija Stanislaw Lemin teoksesta *The Intertellar Milkman, Ion the Quiet*) Ari saapui hotelli Hilbertin pihalle aikoen majoittua hotellissa muutaman päivän. Hotellissa oli äärettömän monta huonetta  $h_1, h_2, h_3, \dots$ . Valitettavasti hotelli oli täynnä, mutta onneksi paikalle sattui hotellin neuvokas johtaja, joka järjesti asian: Ari pääsi huoneeseen  $h_1$ , jossa ollut henkilö siirrettiin huoneeseen  $h_2$ , jossa ollut henkilö siirrettiin huoneeseen  $h_3$  jne.
  - (a) Seuraavana aamuna hotelliin pyrki äärettömän monta uutta vierasta, nimittäin universaalien perhokalastuskilpailun osallistujat  $p_1, p_2, p_3, \dots$ . Hetken mietittyään hotellin johtaja keksi keinon, millä nämäkin vieraat saatiin majoitetuksi hotelli Hilbertiin. Mikä oli tämä keino?
  - (b) Illalla vaikeudet jatkuivat. Galakseissa  $g_1, g_2, \dots$  oli jokaisessa hotelli Hilbertin kaltainen hotelli, ja nämä kaikki hotellit olivat täynnä. Jostakin syystä kaikki muut hotellit paitsi Hilbert päätettiin sulkea, ja niiden asukkaat kuljetettiin Hilbertiin. Hotellin johtaja oli epätoivoissaan, sillä hänen oli sijoitettava äärettömän monen hotellin vieraat, joita kussakin oli äärettömän monta, jo entuudestaan täyteen Hilbertiin. Onneksi Ari oli ammatiltaan matemaatikko ja keksi ratkaisun. Mikä oli hänen ratkaisu?
  - (c) Hilbertin johtaja määrättiin laatimaan luettelo kaikista mahdollisista tavoista, joilla vieraita voidaan sijoittaa tähän hotelliin. Täyttä huonetta tarkoitti luku 1 ja tyhjää luku 0. Esimerkiksi 10101010... tarkoitti, että paritonnumeroidet huoneet ovat varattuja ja paritonnumeroidet vapaita, 111111... sitä, että hotelli on täynnä, ja 0000000... sitä, että hotelli on tyhjä. Parin päivän ahkeran työn jälkeen Hilbertin johtaja tuli Arin luo mukanaan äärettömän pitkä lista äärettömiä jonoja nollia ja ykkösiä. Ari väitti, ettei listassa voi olla kaikkia mahdollisia tapoja vieraiden sijoittamiseksi. Miten hän perusteli väitteensä?