DISKREETTI MATEMATIIKKA, harjoitustehtävät

Tehtäviä tulee todennäköisesti lisää. Uudet tehtävät tulevat aikanaan ladattavaksi samalle sivulle, josta tämäkin moniste löytyi. Ilmoitustaululta on nähtävissä viikkoittain, mitkä tehtävät kulloinkin tulevat laskareihin.

1. Olkoon perusjoukkona $X = \{1, \ldots, 10\}$ ja olkoon $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ ja $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Määrää

a) $(A \cup B) \cap C$,	b) $A \cup (B \cap C)$,	c) $C^{\complement} \cap D^{\complement}$,
d) $(C \cup D)^{\complement}$,	e) $(A \cup B) \setminus C$,	f) $A \cup (B \setminus C)$,
g) $(B \setminus C) \setminus D$,	h) $B \setminus (C \setminus D)$,	i) $(C \cup D) \setminus (A \cup B)$.

2. Olkoot A ja B joukkoja. Osoita seuraavat väitteet oikeiksi tai vääriksi.

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$,	b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
c) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$,	d) $\mathcal{P}(A^{\complement}) = \mathcal{P}(A)^{\complement}$.

   Jos d-kohdan vasemmalla puolella perusjoukkona on X, niin oikealla puolella se on $\mathcal{P}(X)$.

3. Olkoot A, B ja C joukkoja. Osoita, että

   a) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$,

   b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ jos ja vain jos $C \subseteq A$.

4. Osoita Lauseen 4 implikaatiot $3° \implies 4°$ ja $4° \implies 1°$, ts. että

$$A \cup B = B \implies A \setminus B = \emptyset \implies A \subseteq B.$$

5. Osoita, ettei $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$ päde yleisesti. Voiko yhtälö olla milloinkaan voimassa?

6. Olkoon X perusjoukko ja olkoot $A, B, C, D \subseteq X$. Osoita oikeaksi tai vääräksi:

   a) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

   b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

   c) $(A \times B)^{\complement} = A^{\complement} \times B^{\complement}$ (Vasemmalla puolella perusjoukkona on $X \times X$.)

7. Mitä ominaisuuksia (refleksiivinen, symmetrinen, antisymmetrinen, transitiivinen, vertailullinen) relaatiolla $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ on, kun $x \, R \, y$ jos ja vain jos

a) $xy \geq 1$,	b) $x = y + 1$ tai $x = y - 1$,	c) $x = y^2$,
d) $x \geq y^2$?		

8. Olkoot R ja S joukon X relaatioita. Osoita, että $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ ja $(S \cup R)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

9. Olkoot R ja S joukon X relaatioita ja $R \subseteq S$. Osoita, että $R^n \subseteq S^n$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$.

10. Osoita, että joukon X relaatio R on symmetrinen jos ja vain jos $R^{-1} = R$ ja antisymmetrinen jos ja vain jos $R \cap R^{-1} \subseteq I$.

11. Jos $R \subseteq X \times X$ on symmetrinen ja transitiivinen relaatio, voidaan tehdä seuraava (oikea) päättely:

$$x \; R \; y \overset{\text{symm.}}{\Longrightarrow} y \; R \; x \overset{\text{trans.}}{\Longrightarrow} x \; R \; x.$$

Tästä olisi houkuttelevaa päätellä, että R on refleksiivinen. Miksi tätä viimeistä päätelmää ei voi tehdä? Anna esimerkki (vaikkapa joukon $X = \{1, 2\}$) relaatiosta, joka on symmetrinen ja transitiivinen, mutta ei refleksiivinen.

12. Konstruoi joukon $\{1, 2, 3, 4\}$ relaatio R, jolle $t(R) \neq R \cup R^2 \cup R^3$. Miten tämän esimerkin saa yleistettyä joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ relaatioksi S, jolle $t(S) \neq S \cup S^2 \cup \cdots \cup S^{n-1}$?

13. Määrää R^{-1}, $S \circ R$ ja $R \circ S$, kun R ja S ovat seuraavat relaatiot:

   a) $R = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$,
   $S = \{(a, 1), (a, 3), (b, 3)\} \subseteq \{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$,

   b) $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 3)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$,
   $S = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.
   Määrää b-kohdassa myös $R \circ R$.

14. Onko joukon $\mathbb{R}$ relaatio $\sim$, jolle

   a) $x \sim y \iff x + y \in \mathbb{Z}$, b) $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$,

   ekvivalenssi?

15. Voiko osittainen järjestys olla ekvivalenssi? Jos voi, niin milloin? Entä täysi järjestys?

16. Olkoon $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ jos ja vain jos $x_1 < x_2$ tai ($x_1 = x_2$ ja $y_1 \leq y_2$). Osoita, että $\preceq$ on joukon $\mathbb{R}^2$ täysi järjestys.

17. Heikillä on 4 kirjaa, 5 elokuvaa ja 2 videopeliä. Jos Heikki valitsee yhden näistä ajanvietteistä, montako tapaa hänellä on viettää iltansa? Oletetaan, että Heikki päätyy katsomaan (jotakin em.) elokuvaa. Hänellä on myös popcorn-, sipsi- ja karkkipussi ja päättää syödä yhdestä näistä. Kuinka monta mahdollisuutta Heikillä on valita leffa-naposteltavayhdistelmä?

18. Kuinka moni luvuista $1, \ldots, 1000$ on a) jaollinen 3:lla tai 7:llä, b) jaollinen 3:lla, mutta ei 6:llä eikä 7:llä.

19. 100 ihmisen joukosta TV-sarjaa CSI seuraa 20 henkilöä ja sen tytärsarjoja CSI: Miami ja CSI: NY vastaavasti 16 ja 14. 8 seuraa CSI:ta ja Miamia, 5 CSI:ta ja NY:tä sekä 4 molempia tytärsarjoja. Kaikkien sarjojen ystäviä on 2. Kuinka moni ei katso mitään näistä sarjoista?

20. Ympyrän, halkaisija 4 cm, sisältä valitaan 61 pistettä. Osoita, että näistä löytyy kaksi, joiden etäisyys on korkeintaan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm.

21. Valitaan joukosta $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ $n + 1$ lukua. Osoita, että näistä löytyy sellaiset a ja b, että $a \mid b$.

22. Kuinka monella tavalla 5 poikaa ja 4 tyttöä voi asettua riviin a) ilman rajoituksia, b) niin, että pojat ovat vierekkäin, samoin tytöt, c) niin, että tytöt ovat vierekkäin ja pojat muuten vapaasti valittavilla paikoilla?

23. Kuinka moneen eri järjestykseen sanan UNILELU kirjaimet voidaan asettaa? Kuinka monessa järjestyksessä kirjaimet N ja I ovat vierekkäin? Entä E ja U? Entä E ja A?

24. Kuinka monella tavalla 6 ihmistä voi asettua istumaan pyöreän pöydän ympärille, kun kiinnitetään huomiota vain istujien järjestykseen (ei siis siihen, kuka istuu jollain tietyllä tuolilla)? Jos istujat ovat 3 avioparia, kuinka monessa järjestyksessä miehet ja naiset istuvat vuoropaikoilla?

25. Yhdistyksessä on 12 jäsentä. Kuinka monella tavalla sille voidaan valita a) 3-henkinen hallitus, b) puheenjohtaja, varapuheenjohtaja ja sihteeri?

26. Pokerissa pelaajalle jaetaan 5 kortin käsi. Kuinka monta kättä on olemassa, kun pakassa on normaalin 52 kortin lisäksi kaksi samanlaista jokeria? Jos jokereita ei ole mukana, miten moni käsistä on väri (5 samaa maata), entä täyskäsi (kolme samanarvoista ja kaksi muuta samanarvoista)?

27. Moneenko järjestykseen sanan TALLAHASSEE kirjaimet voidaan järjestää, kun A-kirjaimet eivät tule peräkkäisille paikoille?

28. Monellako tavalla k erilaista lippua voidaan sijoittaa n tankoon, kun järjestys on tärkeä ja kaikki liput mahtuvat yhteenkin tankoon?

29. Kuinka monta sellaista suomalaisen loton riviä on olemassa, joissa on ainakin kerran kaksi peräkkäistä numeroa?

30. Laatikossa on 2 ruskeaa, 6 mustaa ja 8 sinistä matkapuhelimen kuorta. Laatikosta otetaan umpimähkään kaksi kuorta. Millä todennäköisyydellä kuoret ovat samanväriset? (YO-tehtävä, syksy -05)

31. Noppaa heitetään 4 kertaa. Mikä on todennäköisyys, että a) saadaan eri silmäluvut, b) sama silmäluku ei esiinny kahdesti peräkkäin, c) silmäluvut 5 ja 6 saadaan ainakin kerran?

32. Kirjahyllyssä on kahdenlaisia kirjoja satunnaisessa järjestyksessä, kumpaakin 5 kappaletta. Millä todennäköisyydellä ensimmäinen ja viimeinen ovat samanlaisia?

33. Oheinen taulukko esittää kolmen ruokalan asiakasosuudet tietyssä opiskelijajoukossa ja sen, miten suuri osa ruokalan asiakkaista on tyytyväisiä.

	asiakasosuus	tyytyväisten osuus
Discus	0,4	0,8
Julinia	0,35	0,95
Kastari	0,25	0,9

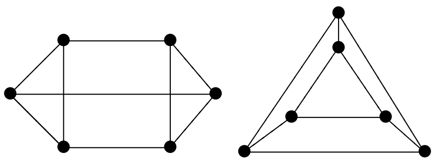
Esimerkiksi Discuksessa käy 40 % ko. opiskelijoista ja näistä 80 % on tyytyväisiä. Mikä on todennäköisyys, että

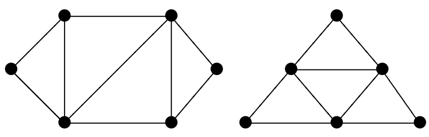
a) satunnaisesti valittu opiskelija syö Juliniassa ja on tyytyväinen,

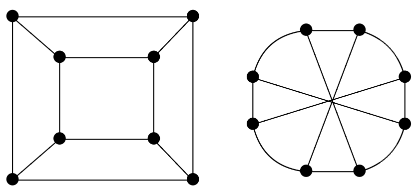
b) muualla kuin Kastarissa syönyt on tyytymätön.

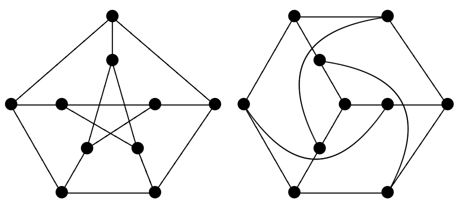
c) satunnaisesti valittu opiskelija on tyytyväinen. Missä tämä opiskelija todennäköisimmin syö?

34. Ovatko seuraavat verkot isomorfiset?

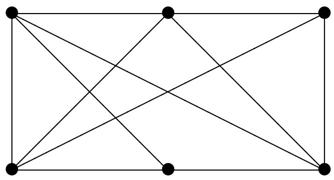
a) 

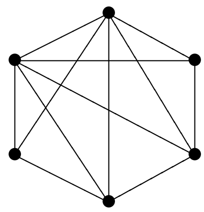
b) 

c) 

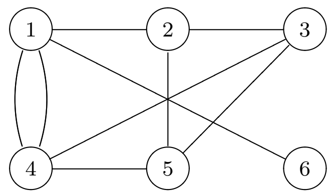
d) 

35. Määrää verkko, joka on isomorfinen annetun verkon kanssa ja jonka välit (eli välejä edustavat viivat kuviossa) eivät leikkaa toisiaan.

a) 

b) 

36. Määrää viereiseen verkkoon solmujoukon a) $\{1, 2, 4, 5\}$ b) $\{2, 3, 5, 6\}$ c) $\{2, 3, 4, 5\}$ virittämä aliverkko.

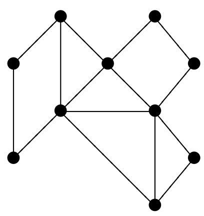


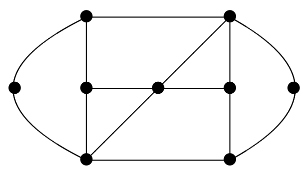
37. Olkoot yksinkertaisen verkon G seuraajaluettelot sen solmuille a, ..., j seuraavat:

$$
\begin{array}{lllll}
a\colon \{f, i, j\}, & b\colon \{c, g\}, & c\colon \{b, e, g\}, & d\colon \{h\}, & e\colon \{c, g\}, \\
f\colon \{a, i, j\}, & g\colon \{b, c, e\}, & h\colon \{d\}, & i\colon \{a, f\}, & j\colon \{a, f\}.
\end{array}
$$

Esitä G graafisesti ja määrää sen yhtenäiset komponentit. Komponentit ovat verkon G aliverkkoja. Määrää näiden yhteysmatriisit. Mitä voit sanoa niiden avulla verkon G yhteysmatriisista?

38. Etsi seuraavista verkoista Hamiltonin sykli ja avoin Hamiltonin ketju, jota ei saa sykliksi yhden solmun lisäämisellä.

a) 

b) 

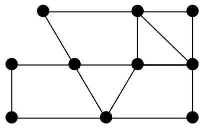
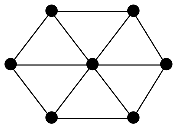
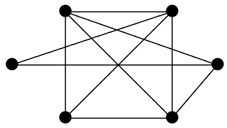
39. Olkoon $G = (V, E, \alpha)$ verkko. Osoita, että

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in R_G^n &\iff \text{on olemassa ketju } \gamma\colon x \to y, \text{ jolle } |\gamma| = n \\
&\iff \text{on olemassa ketju } \gamma\colon y \to x, \text{ jolle } |\gamma| = n \\
&\iff (y, x) \in R_G^n.
\end{aligned}
$$

40. Vanhan kartanon niissä (ja vain niissä) huoneissa, joissa on parillinen määrä ovia, on kummitus. Osoita, että jos ulko-ovia on vain yksi, niin kartanoon tuleva vieras voi aina löytää reitin huoneeseen, jossa ei ole kummituksia.

41. Hiiri aikoo syödä 3 cm × 3 cm × 3 cm -kuution juustoa. Se aloittaa kärjestä ja syö aina kokonaan 1 cm × 1 cm × 1 cm -kuution palan ja siirtyy sitten viereiseen pikkukuutioon. Voiko hiiri syödä viimeisenä keskellä olevan pikkukuution?

42. Onko seuraavissa verkoissa Eulerin ketjua? Perustele vastauksesi ja etsi ketju, jos mahdollista.

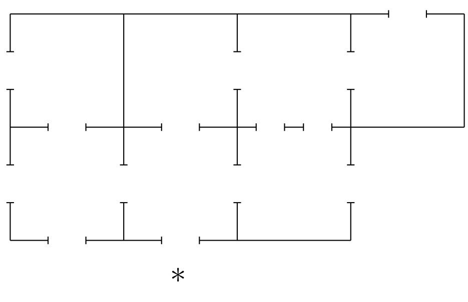
a)  b)  c) 

43. Anna esimerkki verkosta, jossa a) ei ole Eulerin eikä Hamiltonin ketjua, b) on Eulerin ketju mutta ei Hamiltonin ketjua, c) ei ole Eulerin ketjua mutta on Hamiltonin ketju, d) on sekä Eulerin että Hamiltonin ketju.

44. Olkoon $G = (V, E, \alpha)$ verkko ja M_G sen yhteysmatriisi. Olkoon $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ja matriisin M_G rivit indeksoitu samaan järjestykseen. Osoita, että tällöin matriisin M_G^k, $k \geq 0$, (i, j)-alkio on k-pituisten ketjujen $v_i \to v_j$ lukumäärä. Vihje: Käytä induktiota eksponentin k suhteen ja mieti, mikä on (i, j)-alkio matriisissa $\mathsf{M}_G^{k+1} = \mathsf{M}_G \cdot \mathsf{M}_G^k$.

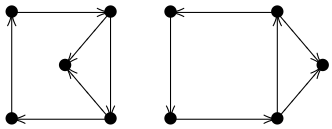
Osoita edelleen, että G on yhtenäinen jos ja vain jos matriisin $\sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{M}_G^k = (\mathsf{M}_G^n - \mathsf{I})/(\mathsf{M}_G - \mathsf{I})$ alkiot ovat nollasta eroavia. Tässä I on yksikkömatriisi.

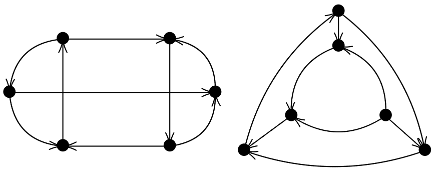
45. Nipa ja Pipsa haluavat kulkea (käsi kädessä) taloon autioon (pohjapiirros alla) ja kierrellä siellä niin, että he kävelevät jokaisesta ovesta täsmälleen kerran. Voivatko he löytää tällaisen reitin? Entä silloin, jos he haluavat aloittaa ja lopettaa kierroksensa tähdellä merkittyyn kohtaan?



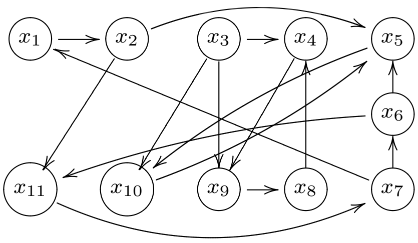
46. Dominolaatassa on kaksi vierekkäistä neliötä, joissa molemmissa on 0–6 pistettä. Osoita, että kaikki erilaiset dominolaatat voidaan asettaa renkaaksi niin, että vierekkäisissä laatanpäissä on sama numero. Onko tämä mahdollista, jos pisteitä on 1–6?

47. Ovatko seuraavat suunnatut verkot isomorfiset?

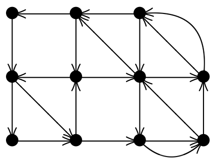
a) 

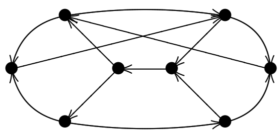
b) 

48. Määrää vahvasti yhtenäiset komponentit suunnatulle verkolle D:



49. Ovatko seuraavat suunnatut verkot vahvasti yhtenäiset? Onko niissä Eulerin polkuja? Perustele vastauksesi.

D_1: 

D_2: 

50. Olkoot $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ ja $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$. Osoita, että $f_1 f_2 \in \mathcal{O}(g_1 g_2)$.

51. Olkoot a, $b > 1$. Osoita, että $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ ja $b^n \prec n!$. Käytä jälkimmäisessä relaation $\prec$ ja raja-arvojen yhteyttä.

52. Valitse (ja perustele valintasi) joukosta $\{1, n^k, \log n, n \log n, k^n\}$, missä $k \in \mathbb{Z}_+$, funktio g, jolle $f \in \Theta(g)$, kun

a) $f(n) = n^4 + 6n^2 - 8n - 5$,	b) $f(n) = n \log n + n^2$,
c) $f(n) = 30$,	d) $f(n) = 1 + 2 + \cdots + n$,
e) $f(n) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$,	f) $f(n) = \log(an + b)$, a, $b \in \mathbb{R}_+$.

53. Olkoot L_1, L_2 ja L_3 kieliä. Ovatko seuraavat kieliparit samoja vai eri kieliä? Perustele vastauksesi.

a) $(L_1^*)^*$, L_1^*;	b) $(L_1 + \{\varepsilon\})^*$, L_1^*;
c) $L_1(L_2 + L_3)$, $L_1L_2 + L_1L_3$;	d) $(L_1L_2)^*$, $L_1^*L_2^*$;
e) $(L_1 + L_2)^*$, $(L_1^*L_2^*)^*$;	f) $(L_1 + L_2)^*$, $L_1^* + L_2^*$;
g) $(L_1 \cap L_2)^*$, $L_1^* \cap L_2^*$;	h) $L_1^*L_2$, $L_2 + L_1L_1^*L_2$;
i) $(L_1L_2)^*L_1$, $L_1(L_2L_1)^*$.	

54. Muodosta kielen $L \subseteq (0+1)^*$ määräävä säännöllinen lauseke, kun L koostuu sanoista a) joiden ensimmäinen ja viimeinen kirjain on 1, b) joissa on täsmälleen kaksi 0:a, c) joissa ei ole peräkkäisiä 1:iä.

55. Sama tehtävä kuin 54, mutta nyt $L \subseteq (a+b)^*$ ja

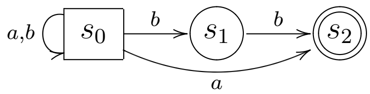
(a) $L = \{x \in (a+b)^* \mid \text{kirjainten } a \text{ määrä } x\text{:ssä on pariton}\}$,

(b) $L = \{x \in (a+b)^* \mid \text{kirjainten } b \text{ määrä } x\text{:ssä on parillinen}\}$,

(c) $L = \{x \in (a+b)^* \mid x\text{:ssä on ainakin yksi } a \text{ ja ainakin yksi } b\}$.

56. Muodosta deterministiset automaatit, jotka hyväksyvät tehtävien 54 ja 55 kielet.

57. Olkoon $\mathcal{A}$ seuraava epädeterministinen automaatti:



Määrää $L(\mathcal{A})$ ja luentojen algoritmilla deterministinen automaatti $\mathcal{B}$, jolle $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})$. Konstruoi myös tyypin 3 kielioppi $\mathcal{G}$, jolle $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{A})$.

58. Konstruoi CF-kielioppi seuraaville kielille:

a) $\{a^{2n}b^{3n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, b) $\{a^m b^n \mid m \geq n \geq 0\}$.

59. Olkoon $\mathcal{G} = (V, \Sigma, \cdot, P)$ kielioppi, missä $V = \{A, B, S\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ ja jonka alkukirjain ja produktiot ovat

a) A ja $P = \{A \to aABc, \quad A \to abc, \quad cB \to Bc, \quad bB \to bb\}$,

b) S ja $P = \{S \to abA, \quad A \to baB, \quad B \to aA, \quad B \to bb\}$.

Määrää kummassakin tapauksessa $L(\mathcal{G})$.

60. Osoita, että kieli $L = \{xcx^{\mathrm{R}} \mid x \in \{a,b\}^*\} \subseteq \{a,b,c\}^*$ ei ole säännöllinen, mutta on CF-kieli. Tässä x^{R} on sanan x *peilikuva*: Jos $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$, niin $x^{\mathrm{R}} = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$.

61. Konstruoi tyypin 3 kieliopista $\mathcal{G} = (V, \Sigma, A, P)$ sellainen tyypin 3 kielioppi, joka generoi kielen $L(\mathcal{G})$ ja jonka produktiot ovat muotoa $X \to \alpha Y$ ja $X \to \alpha$, missä X, $Y \in V$ ja $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.