KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 2, kevät 2007

1. Olkoot z ja $w \in \mathbb{C}$ ja $|w| = 1$. Osoita, että $|1 - \bar{z}w| = |z - w|$.

2. Olkoot $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, joille $a_0 > a_1 > \cdots > a_n > 0$. Olkoon $z \in \mathbb{C}$ yhtälön $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$ juuri. Osoita, että $|z| > 1$.

3. Olkoot $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ yhtälön $a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$ juuret, missä $a_n \neq 0$.
   Osoita, että $z_1 + \cdots z_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ ja $z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$.

4. Määrää ne kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, joille
$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2.$$

5. Määrää luvun $z \in \mathbb{C}$ napakoordinaatit, kun
   a) $z = -3i$, b) $z = \sqrt{3} - i$, c) $z = 2 - i\sqrt{12}$.

6. Laske $(1 - i\sqrt{3})^{11}$ ja $(1+i)^9$ ja $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i\sqrt{3})^3}$.

7. Olkoon $z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq -1$. Osoita, että z voidaan esittää muodossa $z = \dfrac{1+it}{1-it}$ jolloin $t \in \mathbb{R}$.