KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 3, kevät 2007

1. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1, z_2 \neq 0$. Osoita, että $\frac{1}{4}|\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2|$ määrää sen kolmion pinta-alan, jonka kärkipisteet ovat origo,z_1 ja z_2.

2. Osoita, että kolme eri kompleksilukua z_1, z_2 ja z_3 ovat samalla suoralla, jos ja vain, jos $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.

3. Olkoot z_1 ja $z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2$. Määrää joukko $\{z \in \mathbb{C} | \arg\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0\}$.

4. Ratkaise yhtälöt

   a) $z^4 = 1$, b) $z^6 = 1$.

5. Osoita, että

   a) $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = 1$,

   b) $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

6. Osoita, että joukko $\{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| > r\}$ on avoin ($z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ annettuja).

7. Olkoon $A = \{i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \cdots\} \subset \mathbb{C}$. Tutki onko A rajoitettu, suljettu, avoin. Määrää A^0, A' ja $cl(A)$.