

KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 4, kevät 2007

1. Määrää seuraavat raja-arvot (mikäli ovat olemassa)

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} i^n, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n}{n}, \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - in^2}{(1+i)n-1}.$$

2. Osoita, että $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y)$, kun $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

3. Olkoon $f(z) = 2z - i, z \in \mathbb{C}$. Osoita, että f on bijektio $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ja määrää käänteisfunktio f^{-1} . Määrää myös $f(L)$, kun L on origon kautta kulkeva suora. Määrää myös $f(S_r(0))$.

4. Olkoon $f(z) = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0$. Osoita, että f on bijektio. $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Määrää käänteisfunktio f^{-1} . Määrää myös $f(L \setminus \{0\})$ ja $f(S_r(0))$.
(L origon kautta kulkeva suora.)

5. Määrää funktio $f(z) = f(x+iy)$ muodossa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z \in \mathcal{M}(f)$, kun

$$\text{a) } f(z) = z^3, z \in \mathbb{C}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{1}{z^2}, z \neq 0, \quad \text{c) } f(z) = e^{ie}, z \in \mathbb{C}.$$