

KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 5, kevät 2007

1. Osoita, että funktion raja-arvo $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ (mikäli on olemassa) on yksikäsitteinen.
2. Tutki funktion $f(z)$ raja-arvon olemassaoloa pisteessä $z = 0$, kun
 - a) $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$,
 - b) $f(z) = \frac{z}{|z|}$,
 - c) $f(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$.
3. Funktiolle f määritellään $f(0) = 0$ ja
 - a) $f(z) = \frac{z - \bar{z}}{|z|}$,
 - b) $f(z) = \frac{(z + \bar{z})^2}{|z|}$,
 - c) $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$, kun $z \neq 0$.Tutki onko f jatkuva pisteessä $z = 0$.
4. Olkoot f ja g jatkuvia joukossa $A \subset \mathbb{C}$. Osoita, että myös fg on jatkuva A :ssa.
5. Osoita, että funktio $f(z) = z^2$ on tasaisesti jatkuva joukossa $A = D_2(i)$. Onko f tasaisesti jatkuva joukossa $A = \mathbb{C}$?
6. Tutki onko funktiolla $f(z) = i \operatorname{Im} z$ derivaattaa missään pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$.