KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 6, kevät 2007

1. Todista yhdistetyn funktion derivaattaa koskeva ketjusääntö.

2. Osoita, että funktio $f(z) = ze^z$ on analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.

3. Oletetaan, että g on koko $\mathbb{C}$:ssä analyyttinen funktio. Määritellään funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ asettamalla $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$, kun $z \in \mathbb{C}$. Tutki onko f analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.

4. Osoita, että Cauchy-Riemannin yhtälöt saavat napakoordinaateissa muodot
$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad \text{ja} \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

5. Olkoon $f(z) = z^3, z \in S[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$. Tällöin $f^{-1} : \mathbb{C} \to S[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ on olemassa. Määrää $(f^{-1})'(i)$ ja $(f^{-1})'(-1)$.

6. Osoita, että funktiot
$$f(z) = \sin z \quad \text{ja} \quad f(z) = \cos z, z \in \mathbb{C}$$
toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt.