

# KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 7, kevät 2007

1. Osoita, että

a)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ ,      b)  $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$  aina, kun  $z \in \mathbb{C}$ .

2. Osoita, että  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$  aina,  
kun  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

3. Määrää derivaatta  $f'(z)$ , kun

a)  $f(z) = \cos(z^2 + iz)$ ,      b)  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ .

4. Määrää

a)  $\log(-4)$ ,      b)  $\log 3i$ ,      c)  $\log(\sqrt{3} - i)$ .

5. Määrää

a)  $i^{2i}$ ,      b)  $(-i)^i$ ,      c)  $i^{-i}$ .

6. Osoita, että

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log \left( \frac{1 + zi}{1 - zi} \right).$$

7. Laske raja-arvot

a)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2 + 2z}$ ,      b)  $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$ ,      c)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos 2z - 1}{\sin^2 z}$ .