

## Koulumatematiikan perusteet

Harjoitus 7, kevät 2007

1. Olkoon  $X$  perusjoukko. Osoita, että joukkojen yhtämahtavuus on ekvivalenssi-relaatio joukossa  $\mathcal{P}(X)$ .
2. Osoita, että
  - (a)  $|\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}| = |\mathbb{R}_+|$ ,
  - (b)  $|\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}| = |\mathbb{R}|$ ,
  - (c)  $|\mathbb{R}_+| = |\mathbb{R}|$ .
3. Osoita, että  $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ .
4. Osoita, että  $|\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}_0|$  käyttämällä funktiota  $f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$ .
5. Olkoot  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  ja  $c < d$ . Merkitään  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ . Osoita, että  $]a, b[ = ]c, d[$ .
6. Osoita, että  $]0, \epsilon[$  on ylinumeroituva olipa  $\epsilon > 0$  kuinka pieni tahansa.
7. (Tehtävä on lainaus tieteiskirjailija Stanislaw Lemin teoksesta *The Interstellar Milkman, Ion the Quiet*) Ion saapui hotelli Kosmoksen pihalle aikoen yöpyä hotellissa. Hotellissa oli äärettömän monta huonetta  $h_1, h_2, h_3, \dots$ . Valitettavasti hotelli oli täynnä, mutta onneksi paikalle sattui hotellin neuvokas johtaja, joka järjesti asian: Ion pääsi huoneeseen  $h_1$ , jossa ollut henkilö siirrettiin huoneeseen  $h_2$ , jossa ollut henkilö siirrettiin huoneeseen  $h_3$  jne.
  - (a) Seuraavana aamuna hotelliin pyrki äärettömän monta uutta vierasta, nimittäin universaalien filatelistikongressin osallistujat  $f_1, f_2, f_3, \dots$ . Hetken mietittyään hotellin johtaja keksi keinon, millä nämäkin vieraat saatiin majoitetuksi hotelli Kosmokseen. Mikä oli tämä keino?
  - (b) Illalla vaikeudet jatkuivat. Galakseissa  $g_1, g_2, \dots$  oli jokaisessa hotelli Kosmoksen kaltainen hotelli, ja nämä kaikki hotellit olivat täynnä. Jostakin syystä kaikki muut hotellit paitsi Kosmos päätettiin sulkea, ja niiden asukkaat kuljetettiin Kosmokseen. Hotellin johtaja oli epätoivoissaan, sillä hänen oli sijoitettava äärettömän monen hotellin vieraat, joita kussakin oli äärettömän monta, jo entuudestaan täyteen Kosmokseen. Onneksi muuan filatelisti, joka oli ammatiltaan matemaatikko, keksi ratkaisun. Mikä oli hänen ratkaisu?
  - (c) Kosmoksen johtaja määrättiin laatimaan luettelo kaikista mahdollisista tavoista, joilla vieraita voidaan sijoittaa tähän hotelliin. Täyttä huonetta tarkoitti luku 1 ja tyhjää luku 0. Esimerkiksi 10101010... tarkoitti, että paritonnumeroidet huoneet ovat varattuja ja paritonnumeroidet vapaita, jono

11111... tarkoitti sitä, että hotelli on täynnä, ja 000000... sitä, että hotelli on tyhjä. Parin päivän ahkeran työn jälkeen Kosmoksen johtaja tuli Ionin luo mukanaan äärettömän pitkä lista äärettömiä jonoja nollia ja ykkösiä. Ion väitti, ettei listassa voi olla kaikkia mahdollisia tapoja vieraiden sijoittamiseksi. Miten hän perusteli väitteensä?