Matriisiteoria
Harjoitus 1, kevät 2007

1. Olkoon
$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$
Osoita, että $A(\alpha+\beta) = A(\alpha)A(\beta)$. Mikä matriisi $A(\alpha)A(-\alpha)$ on?

2. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$
missä $a, b, c \neq 0$. Määrää käänteismatriisi A^{-1}.

3. a) Osoita, että $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$ aina kun $A, B \in \mathbb{C}_{n\times n}$
   b) Osoita, että sisätulolle pätee $(Ax|y) = (x|A^*y)$ aina kun $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ ja $x, y \in \mathbb{C}^n$.

4. Osoita, että jos A, B, ja $A+B$ ovat säännöllisiä, niin myös $A^{-1}+B^{-1}$ on säännöllinen ja
$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

5. Määritellään kuvaus $A\colon K^n \to K^n$ ($K = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$) siten, että
$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}).$$
Osoita, että kuvaus A on lineaarinen. Mikä on $\dim(\mathcal{R}(A))$?

6. Olkoon $A\colon K^n \to K^n$ lineaarinen kuvaus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
   (i) A on injektio;
   (ii) A on surjektio;
   (iii) A on bijektio.

7. Olkoon $V = \{x \mid x \text{ on kuvaus } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ja määritellään kuvaus $P\colon V \to V$ siten, että
$$Px(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)), \quad \text{kaikilla } x \in V, t \in \mathbb{R}.$$
Osoita, että P on projektio. Mikä on suora summa $\mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{R}(P)$?

8. Olkoon $P, Q\colon V \to V$ projektioita siten, että $\mathcal{N}(P) \subseteq \mathcal{N}(Q)$. Osoita, että $QP = Q$.

Huom. Tehtävät 7 ja 8 ovat harjoituspistetehtäviä.