**Matriisiteoria**

Harjoitus 2, kevät 2007

1. Olkoon $\overline{z} \in K^n$ yhtälön $A\overline{x} = \overline{c}$ ratkaisu, missä $A \in K_{n\times n}$. Osoita, että

   (i) jos $\overline{v} \in \mathcal{N}(A)$, niin $\overline{z} + \overline{v}$ on myös yhtälön $A\overline{x} = \overline{c}$ ratkaisu.

   (ii) jokaiselle ratkaisulle $\overline{x} \in K^n$ kohti on olemassa $\overline{v} \in \mathcal{N}(A)$ siten, että $\overline{x} = \overline{z} + \overline{v}$.

2. Osoita, että matriisin $A = \begin{bmatrix} B_1 & C \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$, missä $B_1$ ja $B_2$ ovat neliömatriiseja, determinantti on $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2$.

   (**Vihje.** Esitä $A$ muodossa $A = C_1 C_2$, missä $C_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$.)

3. Olkoon $A \in K_{m\times n}$ ja $B \in K_{n\times m}$. Osoita, että

   $$\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & I \end{bmatrix} = \det(-AB) \quad (\text{ts. } = (-1)^m \det(AB))\,.$$

   (**Vihje.** Käytä edellistä tehtävää.)

4. Vektoreiden $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k \in \mathbb{C}^n$ $(k \le n)$ *Gram-determinantti* on $G(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k) = \det(A^*A)$, missä $A = [\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k]$ ja $A^* = (\overline{A})^{\mathsf{T}}$. Osoita Binet-Cauchy -kaavaa käyttäen, että aina $G \ge 0$.

5. Olkoon $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in K_{n\times n}$ yläkolmiomatriisi, jossa $a_{kk} \ne 0$ aina kun $k = 1, 2, \ldots, n$. Osoita, että $\operatorname{adj} A$ ja $A^{-1}$ ovat yläkolmiomatriiseja.

6. Todista ns. Cauchyn identiteetti

   $$\det \begin{bmatrix} a_1c_1 + \ldots + a_nc_n & a_1d_1 + \ldots + a_nd_n \\ b_1c_1 + \ldots + b_nc_n & b_1d_1 + \ldots + b_nd_n \end{bmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_i & c_j \\ d_i & d_j \end{vmatrix}.$$

   Osoita tämän avulla, että

   $$(|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2)(|b_1|^2 + \ldots + |b_n|^2) \ge |(a_1\overline{b}_1 + \ldots + a_n\overline{b}_n)|^2$$

   aina kun $a_i, b_i \in \mathbb{C}$.

   (**Vihje.** Hajota identiteetin vasemman puoleinen matriisi kahden matriisin tuloksi ja käytä Binet-Cauchy -kaavaa.)

**Huom.** Tehtävät 5 ja 6 ovat harjoituspistetehtäviä.