Matriisiteoria

Harjoitus 3, kevät 2007

1. Olkoon $A \in K_{n\times n}$. Osoita, että

   (i) jos $r(A) = n$, niin $r(\operatorname{adj} A) = n$;

   (ii) jos $r(A) = n-1$, niin $r(\operatorname{adj} A) = 1$;

   Vihje. Käytä arvionnissa yhtälöä $r(A \cdot \operatorname{adj} A) \geq r(A) + r(\operatorname{adj} A) - n$.

   (iii) jos $r(A) < n-1$, niin $r(\operatorname{adj} A) = 0$.

2. Määrää matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

   LU-hajotelma (ks. Lause 2.14). Mikä on $\det A$?

   Vihje. Kirjoita matriisi A vaaditussa muodossa LU tuntemattomien muuttujien avulla ja ratkaise ne.

3. Olkoon A edellisen tehtävän matriisi. Ratkaise LU-hajotelmaa käyttäen yhtälö $Ax = (1,1,1)^{\mathsf{T}}$.

4. Olkoon matriisin $A \in K_{n\times n}$ kaikki johtavat pääminorit (siis myös $\det A$) nollasta eroavia. Osoita, että $A = LDU$, missä D on diagonaalimatriisi, L on sellainen alakolmio- ja U sellainen yläkolmiomatriisi, että diagonaalialkiot ovat kaikki ykkösiä. Mitä voit sanoa hajotelman yksikäsitteisyydestä?

5. Osoita, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on hermiittinen (ts. $A^* = A$) jos ja vain jos $(Ax|y) = (x|Ay)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{C}^n$.

6. Olkoon $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$. Osoita, että jos $x^*Ax = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{C}^n$, niin $A = 0 \in \mathbb{C}_{n\times n}$.

   Vihje. Käytä vektoreita e_i, $e_i + e_j$ ja $e_i + \mathrm{i}e_j$.

7. Matriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ sanotaan olevan unitaarinen jos $A^* = A^{-1}$, ts. $A^*A = I$. Osoita tehtävää 5 käyttäen, että A on unitaarinen jos ja vain jos $(Ax|Ax) = (x|x)$ kaikilla $x \in \mathbb{C}^n$.

Huom. Pistetehtäväksi voit valita **kaksi** tehtävää tehtävistä 5, 6 ja 7. Tekemällä kaikki pistetehtävät, voit korvata edellisistä harjoituksista tekemättömän pistetehtävän.