Matriisiteoria
Harjoitus 4, kevät 2007

1. Olkoon $A\colon V \to V$ lineaarinen kuvaus. Osoita, että jos jollakin vektorilla $x_0 \in V$ ($x_0 \neq \overline{0}$) pätee
$$Ax_0 = \lambda x_0,$$
jollakin $\lambda \in K$, niin aliavaruus $S = \mathcal{L}\{x_0\}$ on A-invariantti.

2. Määrää matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$
karakteristinen polynomi
   (i) laskemalla $\det(\lambda I - A)$ ja
   (ii) laskemalla matriisin A pääminorit (Lause 3.14).

   Määrää matriisin A spektri $\sigma(A)$ ja ominaisvektorit.

3. Olkoon matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
   (a) A on unitaarinen;
   (b) $(Ax|Ay) = (x|y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{C}^n$;
   (c) matriisin A pystyrivit ovat ortonormaaleja;
   (d) matriisin A vaakarivit ovat ortonormaaleja.

   (**Vihje.** Laske kohdissa (c) ja (d) matriisien A^*A ja AA^* (i,j)-alkiot ja tulkitse sisätulon avulla.)

4. Olkoon matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ unitaarinen. Osoita, että $|\lambda| = 1$ matriisin A jokaiselle ominaisarvolle $\lambda \in \mathbb{C}$. Osoita lisäksi, että $|\det A| = 1$.

5. Osoita, että jos $A \in K_{n\times n}$ on hermiittinen (ts. $A^* = A$) ja positiivisesti definiitti (ts. $x^*Ax > 0$ kaikilla $x \in K^n \setminus \{\overline{0}\}$), niin $\det A > 0$.

   (**Vihje.** Tarkastele ominaisvektoreita.)

6. Osoita, että hermiittisen matriisin ominaisarvot ovat reaaliset ja erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisvektori ovat keskenään ortogonaaliset.

   (**Vihje.** Osoita aluksi, että $\lambda = \overline{\lambda}$ kaikilla ominaisarvoilla λ.)

7. Olkoon $T\colon V \to V$ lineaarinen kuvaus, missä $\dim V = n$. Oletetaan, että $S \subseteq V$ on sellainen T-invariantti aliavaruus, että $\dim S = r$. Osoita, että tällöin lineaarisen kuvauksen T matriisi A voidaan esittää muodossa
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$
missä matriisit $A_1 \in K_{r\times r}$ ja $A_2 \in K_{(n-r)\times(n-r)}$.

   (**Vihje.** Esitä V muodossa $S \oplus S'$. Huomaa, että S' ei ole välttämättä T-invariantti.)

Huom. Yllä V on äärellisulotteinen K-kertoiminen vektoriavaruus.

Tehtävät 6 ja 7 ovat pistetehtäviä.