Matriisiteoria
Harjoitus 5, kevät 2007

1. Osoita, että matriisin $A \in K_{n\times n}$ erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

2. Laske matriisin $A^k + 3A + 2I$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ominaisarvot kun
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$
(**Vihje.** Määrää matriisin A ominaisarvot (ks. harjoitus 4 teht. 2.)

3. Milloin 2×2-matriisi on diagonalisoituva?

4. Olkoon matriisit $A \in K_{n\times n}$ ja $B \in K_{n\times n}$ similaarisia. Osoita, että
   (a) $\det A = \det B$ ja $r(A) = r(B)$;
   (b) $c_A(\lambda) = c_B(\lambda)$ ja $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;
   (c) A^{T} ja B^{T} ovat similaariset;
   (d) $p(A)$ ja $p(B)$ ovat similaariset aina kun $p(\lambda)$ on K-kertoiminen polynomi.

   Osoita lisäksi, että matriisit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ eivät ole similaariset vaikka niiden asteet, determinantit, karakteristiset polynomit ja jäljet ovat samat.

5. Olkoon A ja B diagonalisoituvia. Osoita, että A ja B ovat similaariset jos ja vain jos $c_A(\lambda) = c_B(\lambda)$. (Vrt. edellinen tehtävä)

6. Osoita, että matriisin $A \in K_{n\times n}$ vasempia ominaisvektoreita vastaavat ominaisarvot ovat samat kuin oikeita ominaisvektoreita vastaavat ominaisarvot. (Ei siis tarvitse puhua vasemmista ja oikeista ominaisarvoista.)

7. Osoita, että matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ on diagonalisoituva ja määrää spektraaliesityslauseessa (ks. luennot) esiintyvät projektiot G_j. Laske tämän avulla A^{20}.

8. Osoita, että matriiseilla AB ja BA on sama karakteristinen polynomi aina kun $A, B \in \mathbb{C}_{n\times n}$.

   (**Vihje.** Käytä hyväksi yhtälöä
$$\underbrace{\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}}_{E} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}}_{F}$$
   ja totea, että E ja F ovat similaariset.)

Tehtävät 7 ja 8 ovat pistetehtäviä.