Matriisiteoria

Harjoitus 6, kevät 2007

1. Onko matriisi
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
diagonalisoituva? Onko A unitaarisesti similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa? Onko A normaali?

2. Olkoon matriisin A ominaisarvot $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = 0$ sekä niitä vastaavat ominaisvektorit $x_1 = (-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $x_2 = (-1, 4, 1)^{\mathrm{T}}$ ja $x_3 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$. Määrää matriisi A.

3. Olkoon matriisi $A \in K_{n\times n}$ idempotentti (eli projektio), ts. $A^2 = A$.

   (a) Osoita, että jos λ on matriisin A ominaisarvo, niin $\lambda = 0$ tai $\lambda = 1$.

   (b) Jos x on matriisin A ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, niin määrää $A^{200}x$.

4. Olkoon $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ ja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sen ominaisarvot. Osoita, että

   (a) A^*A on hermiittinen;

   (b) $\operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$;

   (c) $|\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2 \le \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \operatorname{tr}(A^*A)$.

   (**Vihje.** Käytä Schurin normaalimuotoa ja muista, että similaarisilla matriiseilla on sama jälki.)

   Huom. Merkintä $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ tarkoittaa summaa $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$.

5. Olkoon $A = I - \alpha x x^*$, missä $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\overline{0}\}$ ja $\alpha = 2/\|x\|^2$ (muistutus: $\|x\|^2 = (x|x) = x^*x$). Osoita, että matriisi A on hermiittinen ja unitaarinen.

   Osoita lisäksi, että $\lambda = -1$ on matriisin A ominaisarvo ja x sitä vastaava ominaisvektori.

6. Tarkastellaan tehtävän 1 matriisia $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$. Määrää matriisi B siten, että $B^2 = A$. Voiko tuloksen yleistää koskemaan jokaista diagonalisoituvaa matriisia $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ (ts. voiko aina löytää sellaisen matriisi B, että $B^2 = A$)?

   (**Vihje.** Käytä luentojen seurausta 4.5 matriisin B määrittelyssä.)

7. Olkoon $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ symmetrinen sekä r sen pienin ja R sen suurin ominaisarvo. Osoita, että
$$r \le x^{\mathrm{T}} A x \le R$$
aina kun $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\|x\| = 1$. Muotoile vastaava tulos hermiittisille matriisille $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$.

   (**Vihje.** Käytä luentojen lausetta 4.14.)

Tehtävät 5, 6 ja 7 ovat pistetehtäviä, joista riittää valita kaksi. Kaikki tehtävät tekemällä mahdollisuus korvata aikaisempia pistetehtäviä.