

Matriisiteoria

Harjoitus 7, kevät 2007

1. Määää matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

singulaariarvohajotelma sekä Moore-Penrose -inverssi.

2. Määää matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Moore-Penrose -inverssi ja sen avulla yhtälön $Ax = (1, 0, 2)^T$ paras likimääräisratkaisu.

3. Osoita, että $\mathcal{N}(A)$ ja $\mathcal{R}(A)$ ovat ortogonaaliset kun $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$.
4. Osoita, että matriisin $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ polaarinen hajotelma on yksikäsitteinen jos matriisi A on säännöllinen.
5. Osoita, että Moore-Penrose -inverssi toteuttaa matriisiyhtälöryhmän

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ (AX)^* = AX \\ (XA)^* = XA \end{cases}$$

6. Olkoon $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$. Osoita, että jos U ja V ovat unitaarisia, niin $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$. Osoita tätä käyttäen, että jos matriisi A on normaali, niin $(A^k)^+ = (A^+)^k$ jokaiselle kokonaisluvulle $k > 0$.

Tehtävät 5 ja 6 ovat pistetehtäviä.