ALGEBRA I

Harjoitus 10, kevät 2008

1. Olkoon G Abelin ryhmä ja $f : G \to G,\ f(a) = a^2$.
   Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.

2. Olkoon $G = \mathbb{Z}_7^*$ ja f kuten tehtävässä 1. Määrää $Im(f)$ ja $Ker(f)$.

3. Olkoon G Abelin ryhmä ja $f : G \to G,\ f(a) = a^{-1}$.
   Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.

4. Olkoon G ryhmä ja olkoon kuvaus $f : G \to G,\ f(a) = a^{-1}$ ryhmähomomorfismi. Osoita, että G on Abelin ryhmä.

5. Millaisia ryhmähomomorfismeja voit laatia ryhmältä $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ ryhmälle $(\mathbb{Z}_5, +)$?
   (Vihje: Käytä homomorfismien peruslausetta.)

6. Olkoon G ryhmä ja M sekä N ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Todista: Jos
   $M \cap N = \{e\}$, niin $xy = yx$ aina, kun $x \in M$ ja $y \in N$.