

# ALGEBRA I

Harjoitus 12, kevät 2008

1. Määritellään joukossa  $\mathbb{Z}$  laskutoimitukset  $(*)$  ja  $(\circ)$  seuraavasti:

$$a * b = a + b + 1,$$

$$a \circ b = a + b + ab.$$

Osoita, että  $(\mathbb{Z}, *, \circ)$  on kommutatiivinen rengas.

2. Olkoon  $S = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$ . Osoita, että  $(S, +, \cdot)$  on rengas, missä  $(+)$  ja  $(\cdot)$  ovat matriisien yhteenlasku ja kertolasku operaatiot. Onko kyseessä kommutatiivinen rengas?

3. Osoita, että Gaussin kokonaislukujen joukko  $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$  muodostaa renkaan.  
(Vihje: Osoita, että  $\mathbb{Z}[i]$  on renkaan  $\mathbb{C}$  alirengas).

4. Onko  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$  reaalilukujen renkaan  $\mathbb{R}$  alirengas?

5. Rengasta  $R$  sanotaan Boolean renkaaksi, mikäli  $x^2 = x$  aina, kun  $x \in R$ . Osoita, että Boolean rengas on kommutatiivinen.