

ALGEBRA I

Harjoitus 7, kevät 2008

1. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_8, +)$. Mitkä seuraavista ovat sen aliryhmiä?
 - a) $H_1 = \{[0], [2], [4], [6]\}$,
 - b) $H_2 = \{[0], [3], [6]\}$,
 - c) $H_3 = \{[0], [4]\}$.
2. Kirjoita ryhmän $(\mathbb{Z}_{14}^*, \bullet)$ ryhmätaulu. Onko $H = \{[1], [5], [11]\}$ ryhmän \mathbb{Z}_{14}^* aliryhmä? Perustele vastauksesi.
3. Osoita, että $H = \{[1], [9], [11]\}$ on ryhmän $(\mathbb{Z}_{14}^*, \bullet)$ aliryhmä. Määrää aliryhmän H vasemmat sivuluokat.
4. Olkoon G ryhmä sekä H ja K ryhmän G aliryhmiä. Osoita, että $H \cap K$ on ryhmän G aliryhmä.
5. Olkoon G ryhmä, $K \leq G$ ja $H \leq G$. Tiedetään, että $|K| = 40$ ja $|H| = 33$. Mitä voit sanoa aliryhmän $H \cap K$ kertaluvusta?
6. Olkoon G äärellinen ryhmä ja $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall \ g \in G\}$. Osoita, että $Z(G) \leq G$.
7. Olkoon G ryhmä ja $|G| = 2r$, missä $r \geq 1$. Osoita, että ryhmässä G on kertalukua kaksi oleva alkio. (Siis $x \in G$, $x \neq e$ ja $x^2 = e$.) (Vihje: epäsuora todistus).