

ALGEBRA I

Harjoitus 9, kevät 2008

1. Ryhmän $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ aliryhmällä $H = \{[0], [4], [8], [12], [16]\}$ on neljä sivuluokkaa. Muodosta tekijäryhmän \mathbb{Z}_{20}/H ryhmätaulu.
2. Ryhmällä $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ on normaali syklinen aliryhmä $N = \langle [4] \rangle$. Muodosta tekijäryhmän \mathbb{Z}_{15}^*/N ryhmätaulu.
3. Onko tehtävän 2. ryhmällä \mathbb{Z}_{15}^* kertalukua neljä olevaa normaalia aliryhmää? Myönteisessä tapauksessa muodosta vastaava tekijäryhmä.
4. Olkoon $G = \langle a \rangle$ kertalukua yhdeksän oleva syklinen ryhmä. Osoita, että $K = \{e, a^3, a^6\}$ on G :n normaali aliryhmä. Muodosta tekijäryhmän G/K ryhmätaulu.
5. Onko tehtävän 4. ryhmällä G kertalukua kaksi olevaa normaalia aliryhmää? Jos on, niin muodosta vastaava tekijäryhmä.
6. Olkoon G ryhmä ja $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall \ g \in G\}$. Osoita, että ryhmän G keskus $Z(G)$ on ryhmän G normaalialiryhmä. (vrt. Harjoitus 7 tehtävä 6.)
7. Olkoon G ryhmä ja $M \trianglelefteq G$ sekä $N \trianglelefteq G$. Osoita, että $M \cap N \trianglelefteq G$.