

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Harjoitus 2 kevät 2008

1. Betafunktio määritellään integraalina

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt.$$

a) Osoita, että jos $\operatorname{Re} z > 0$ ja $\operatorname{Re} w > 0$, niin

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

b) Osoita, että

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} = \frac{2^{n+1}n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

2. Osoita, että $J_0'(x) = -J_1(x)$ derivoimalla J_0 :n sarjakehitelmä.

3. Laske integraalit

a) $\int_0^2 J_1(x) dx$ b) $\int_0^2 J_3(x) dx$.

4. Osoita, että

a) $\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta);$

b) $\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin((2n-1)\theta).$

5. Osoita, että

a) $\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x);$

b) $\sin x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n-1}(x).$

6. Osoita, että $\cos(m\theta - x \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos((m-n)\theta).$

7. a) Osoita, että

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\theta - x \sin \theta) d\theta, \quad \text{kun } m = 0, 1, \dots$$

b) Osoita, että

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) \cos(m\theta) d\theta \quad \text{kun } m \text{ on parillinen, ja}$$

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) \sin(m\theta) d\theta \quad \text{kun } m \text{ on pariton.}$$