DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Harjoitus 3 kevät 2008

1. Osoita, että Legendren polynomeille pätevät kaikilla $n \geq 1$ yhtälöt

   a) $xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$;

   b) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$.

2. Määrää funktioiden

   a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

   Legendren sarjojen kolme ensimmäistä termiä.

3. Olkoon $p(x)$ n:nnen asteen polynomi, $(n \geq 1)$ jolle $\int_{-1}^{1} x^k p(x) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Osoita, että $p(x) = c\,P_n(x)$ eräällä c:n vakioarvolla.

4. Olkoon f reaalifunktio, jolle $\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx < \infty$, sekä m positiivinen kokonaisluku. Osoita, että se m:nnen asteen polynomi $p(x)$, joka minimoi integraalin $\int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx$ on

$$p(x) = \sum_{n=o}^{m} a_n P_n(x), \quad \text{missä } a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx, \; 0 \leq n \leq m.$$

5. Osoita, että se n:nnen asteen polynomi $p(x)$, jonka johtokerroin on yksi ja joka minimoi integraalin $\int_{-1}^{1} p(x)^2 dx$, on Legendren polynomi $P_n(x)$ jaettuna johtokertoimellaan. (Polynomin johtokerroin on sen muuttujan korkeimman potenssin kerroin.)