DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Harjoitus 4 kevät 2008

1. Osoita, että yhtälöillä $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}$, $n = 0, 1, \ldots$ määritelyille, ns. Hermite'n polynomeille on voimassa

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - H_n'(x),\ n = 0, 1, \ldots;\\ &\text{b)}\quad H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x),\ n = 1, 2, \ldots;\\ &\text{c)}\quad H_n''(x) - 2x\, H_n'(x) + 2n\, H_n(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

2. a) Osoita, että Hermiten polynomeille pätee

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\, \frac{z^n}{n!} = e^{2xz - z^2} \qquad \text{aina, kun } x \in \mathbb{R} \text{ ja } z \in \mathbb{C}.$$

Opastus: Kehitä funktio $e^{-(x-z)^2}$ Taylorin sarjaksi muuttujan z suhteen.
b) Osoita a)-kohdan avulla, että

$$H_0'(x) = 0, \qquad H_n'(x) = 2n\, H_{n-1}(x), \quad \text{kun } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

3. Osoita, että funktio $y = h_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ on differentiaaliyhtälön

$$y'' + (2n + 1 - x^2)y = 0$$

ratkaisu jokaisella $n = 0, 1, \ldots$.

4. Ratkaise Schrödingerin aaltoyhtälö

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - \frac{1}{2}k\, x^2\right)\psi = 0,\ k = 4\pi^2 m\nu^2,\ E = h\nu(n + \frac{1}{2}).$$

Opastus: suorita muuttujan vaihto $u = 2\pi\sqrt{\dfrac{\nu m}{h}}\, x$.

5. Määrää Sturm-Liouvillen probleeman

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y(1) = 0$$

ominaisarvot ja vastaavat ominaisfunktiot.