

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Harjoitus 5 kevät 2008

1. Määrää Sturm-Liouvillen probleeman

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda}{x} y = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y'(e^{2\pi}) = 0,$$

ei-negatiiviset ominaisarvot ja vastaavat ominaisfunktiot.

2. Kehitä funktio $f(x) = 1$ välillä $[0, 1]$ Sturm-Liouvillen probleeman

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(1) = 0,$$

ominaisfunktioiden avulla ortogonaalisarjaksi.

3. Määrää seuraavien funktioiden Fourier'n sarjat

$$\text{a) } f(x) = x, \quad -\pi \leq x < \pi; \quad \text{b) } f(x) = |x|, \quad -1 < x < 1.$$

4. Määrää funktion $f(x) = e^x$, $-\pi \leq x < \pi$, jaksollisen jatkeen Fourier'n sarja ja tämän sarjan avulla sarjojen

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

summat.

5. Määrää funktioiden a) $f(x) = x^3$; b) $f(x) = x^4$ kosinisarjat.

6. Määrää edellisen tehtävän tulosten nojalla seuraavien sarjojen summat;

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$