

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Harjoitus 8 kevät 2008

1. Ratkaise muuttujien erottamismenetelmällä reuna-arvoprobleema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0, & 0 < y < b, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, b) = f(x), & 0 < x < a. \end{cases}$$

2. Ratkaise muuttujien erottamismenetelmällä reuna-arvoprobleema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, & 0 < x < 1, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

3. Mikä on äärettömän pituisen kielen alkuarvoprobleeman

$$\begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

ratkaisu, kun a) $f(x) = 0$ ja $g(x) = \cos x$, b) $f(x) = x$ ja $g(x) = x$.

4. Ratkaise Laplace-muunnosten avulla reuna-arvoprobleema

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 3t + x, & t > 0, & x > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ u(0, t) = \frac{t^2}{2}, & t \geq 0. \end{cases}$$

5. Ratkaise Fourier-muunnosten avulla reuna-arvoprobleema

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & t \in \mathbb{R}, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$