KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 4, kevät 2008

1. Määrää seuraavat raja-arvot (mikäli ovat olemassa)

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{i^n}{n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} i^n$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+i)^n}{n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-in^2}{(1+i)n-1}$.

2. Osoita, että $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$, kun $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

3. Olkoon jono $(z_n) \subset \mathbb{C}$ määritelty ehdoilla $z_0 = 3$ ja $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + 2i$. Osoita, että jono (z_n) suppenee ja määrää sen raja-arvo.

4. Olkoon $f(z) = iz+2, z \in \mathbb{C}$. Osoita, että f on bijektio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ja määrää käänteisfunktio f^{-1}. Määrää myös $f(L)$, kun L on origon kautta kulkeva suora. Määrää myös $f(S_r(0))$.

5. Olkoon $f(z) = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0$. Osoita, että f on bijektio. $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Määrää käänteisfunktio f^{-1}. Määrää myös $f(L \setminus \{0\})$ ja $f(S_r(0))$.
   (L origon kautta kulkeva suora.)

6. Määrää funktio $f(z) = f(x+iy)$ muodossa $f(z) = u(x,y)+iv(x,y), z \in \mathcal{M}(f)$, kun

   a) $f(z) = z^3, z \in \mathbb{C}$, b) $f(z) = \frac{1}{z^2}, z \neq 0$.