KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 5, kevät 2008

1. Osoita, että funktion raja-arvo $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ (mikäli on olemassa) on yksikäsitteinen.

2. Tutki funktion $f(z)$ raja-arvon olemassaoloa pisteessä $z = 0$, kun

   a) $f(z) = \frac{Rez}{z}$, b) $f(z) = \frac{z}{|z|}$, c) $f(z) = \frac{zRez}{|z|}$.

3. Funktiolle f määritellään $f(0) = 0$ ja

   a) $f(z) = \frac{z-\bar{z}}{|z|}$, b) $f(z) = \frac{(z+\bar{z})^2}{|z|}$, c) $\frac{R_e(z^2)}{z^2|}$, kun $z \neq 0$.

   Tutki onko f jatkuva pisteessä $z = 0$.

4. Olkoot f ja g jatkuvia joukossa $A \subset \mathbb{C}$. Osoita, että myös fg on jatkuva A:ssa.

5. Osoita, että funktio $f(z) = z^2 + 2z, z \in \mathbb{C}$, on jatkuva pisteessä z_0.

6. Osoita, että funktio $f(z) = z^2, z \in S[\pi, 2\pi) = \{z \in \mathbb{C} | z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, on bijektio $S[\pi, 2\pi) \to \mathbb{C}$.
   Määrää $f^{-1}(-5 + 12i)$.