KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 6, kevät 2008

1. Todista yhdistetyn funktion derivaattaa koskeva ketjusääntö.

2. Osoita, että funktio $f(z) = ze^z$ on analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä. Määrää $f'(z)$.

3. Oletetaan, että g on koko $\mathbb{C}$:ssä analyyttinen funktio. Määritellään funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ asettamalla $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$, kun $z \in \mathbb{C}$. Tutki onko f analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.

4. Olkoon $f(z) = f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3), z = x + iy \in \mathbb{C}$. Osoita, että f toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt. Määrää $f'(z)$.

5. Osoita, että Cauchy-Riemannin yhtälöt saavat napakoordinaateissa muodot
$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad \text{ja} \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta .$$

6. Olkoon $f(z) = z^3, z \in S[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$. Tällöin $f^{-1} : \mathbb{C} \to S[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ on olemassa. Määrää $(f^{-1})'(i)$ ja $(f^{-1})'(-1)$.