KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 7, kevät 2008

1. Osoita, että funktiot

$$f(z) = \sin z \quad \text{ja} \quad f(z) = \cos z, z \in \mathbb{C}$$

toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt.

2. Olkoon f alueessa $A \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio.

   a) Oletetaan, että $f'(z) = 0$ aina, kun $z \in A$. Osoita, että f on vakiofunktio A:ssa.

   b) Oletetaan, että $f = u + iv$ ja u on vakiofunktio A:ssa. Osoita, että f on vakio A:ssa. Tutki myös tapaus, missä $u^2 + v^2$ on vakio funktio A:ssa.

3. Osoita, että $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ aina, kun $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

4. Määrää derivaatta $f'(z)$, kun

   a) $f(z) = \cos(z^2 + iz)$, b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

5. Määrää

   a) $\log(-4)$, b) $\log 3i$, c) $\log(\sqrt{3} - i)$.

6. Määrää

   a) i^{2i}, b) $(-i)^i$, c) i^{-i}.

7. Osoita, että

$$arc\tan z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1 + zi}{1 - zi}\right).$$